ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 4

№ 2

2012

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса реда[illegible] тики
іверситет

Тел.: (0342) [illegible]
e-mail: cmp.if.ua@gmail.com
Адреса в інтернеті: http://www.cmp.pu.if.ua

ISSN 2075-9827

К М П

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 4

№ 2

2012

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т.4, №2
2012

Зміст

Carpathian mathematical publications

Scientific journal
V.4, №2
2012

Contents

Карпатские математические публикации

Научный журнал

Т.4, №2

2012

Содержание

УДК 517.524

Антонова Т.М.

ПРО ПРОСТІ КРУГОВІ МНОЖИНИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Антонова Т.М. *Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 165–174.

Досліджено значення радіусів кругів з центром у початку координат, які є простими множинами абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $b_0, a_{i(k)}$ — комплексні сталі, $i_0 = N$ — кількість гілок розгалужень, $i(k)$ — мультиіндекс, $i(k) \in I$,

$$I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 ... i_k; 1 \le i_k \le i_{k-1}; k = 1, 2, ...\}.$$

Підхідними дробами n-го порядку (n-ми апроксимантами) ГЛД (1) називаються вирази

$$f_0 = b_0, \ f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \ n = 1, 2, ...$$

ГЛД (1) називається збіжним, якщо існує скінченна границя $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Число f вважається значенням збіжного ГЛД (1). ГЛД (1) збігається абсолютно, якщо збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|$.

Послідовність $\{E_{i(k)}\}$ непорожніх множин $E_{i(k)} \subseteq \mathbb{C}$, $i(k) \in I$, називається послідовністю множин збіжності (абсолютної збіжності), якщо за умови

$$a_{i(k)} \in E_{i(k)}, \quad i(k) \in I,$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A15.

Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, множина абсолютної збіжності.

ГЛД (1) збігається (збігається абсолютно). Якщо $E_{i(k)} = E$ для всіх $i(k) \in I$, то E називається простою множиною збіжності (абсолютної збіжності) ГЛД (1).

Напевно, найвідомішою простою множиною збіжності звичайних ланцюгових (неперервних) дробів є круг Ворпіцького [4] — круг з центром у початку координат і радіусом $\frac{1}{4}$. Встановлені значення радіусів простих кругових множин збіжності для деяких багатовимірних узагальнень неперервних дробів — ГЛД загального вигляду [3], двовимірних неперервних дробів [5], інтегральних ланцюгових дробів [6]. У даній роботі розглядається питання про радіуси простих кругових (з центром у початку координат) множин абсолютної збіжності ГЛД вигляду (1).

Твердження 1. *[1] ГЛД (1) збігається абсолютно, якщо існують такі додатні сталі $t_{i(k)}$, $i(k) \in I$, що для всіх можливих мультиіндексів виконується умова*

$$\left|a_{i(k)}\right| \le t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right), \quad i(k) \in I.$$

Для доведення твердження 1 використовується метод мажорант і оцінка

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right| \ge \overline{Q}_{i(k)}^{(n)} \ge 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}, \; i(k) \in I, \; n = 1, 2, \ldots, \; 1 \le k \le n, \tag{2}$$

де $Q_{i(k)}^{(n)}$, $\overline{Q}_{i(k)}^{(n)}$ — скінченні ГЛД вигляду

$$Q_{i(k)}^{(k)} = \overline{Q}_{i(k)}^{(k)} = 1, \; Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=k+1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{a_{i(p)}}{1}, \; \overline{Q}_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=k+1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{-\left|a_{i(p)}\right|}{1},$$

$$k = 1, \, 2, \, \ldots, \; n > k,$$

які називаються залишками ГЛД (1) і ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-\left|a_{i(k)}\right|}{1}$$

відповідно.

З твердження 1 випливає, що послідовність множин

$$E_{i(k)} = \left\{ z : z \in \mathbb{C}, \; |z| \le t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right) \right\}, \; i(k) \in I,$$

де $t_{i(k)}$ — деякі додатні числа, такі, що $\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} t_{i(k)} < 1$, $i(k) \in I$, є послідовністю множин абсолютної збіжності ГЛД (1), а радіус круга з центром у початку координат, що є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД (1) з N гілками розгалужень, можна визначити з умови

$$R_N = \inf_{i(k) \in I} t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right).$$

Якщо $t_{i(k)} = \frac{1}{2i_{k-1}}$, $i(k) \in I$, твердження 1 перетворюється на аналог ознаки Ворпіцького для ГЛД (1) [2]. У цьому випадку шуканий радіус дорівнює

$$R_N = \min_{1 \le i_{k-1} \le N} \frac{1}{2i_{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4N},$$

як і для ГЛД загального вигляду з N гілками розгалужень, для яких константа $\frac{1}{4N}$ є непокращуваною [3]. Якщо $t_{i(k)} = t_{i_k}$, $i(k) \in I$, то радіус круга з центром у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД (1), можна визначити з умови

$$R_N = \min_{1 \le k \le N} t_k \left(1 - \sum_{p=1}^{k} t_p\right). \tag{3}$$

Твердження 2. *Радіус простої кругової з центром у початку координат множини абсолютної збіжності ГЛД (1) — це N-й член послідовності $\{R_k\}$, де*

$$0 < R_1 \le \frac{1}{4}, \; R_{k+1} = \frac{R_k}{(R_k + 1)^2}, \; k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $\{r_k\}$ — послідовність таких додатних чисел, що

$$0 < r_1 < 1, \; r_{k+1} = \frac{r_k\,(1 - r_k)}{r_k\,(1 - r_k) + 1}, \; k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

і

$$t_1 = r_N, \; t_p = r_{N-p+1} \prod_{l=1}^{p-1} (1 - r_{N-l+1}), \; p = 2, \ldots, N. \tag{6}$$

Зауважимо, що

$$1 - \sum_{p=1}^{k} t_p = \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}), \; k = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Дійсно,

$$1 - t_1 = 1 - r_N, \; 1 - t_1 - t_2 = 1 - r_N - r_{N-1}\,(1 - r_N) = (1 - r_{N-1})\,(1 - r_N)\,.$$

Припускаючи, що рівність (7) справджується для деякого значення k, $1 \le k < N$, отримаємо

$$1 - \sum_{p=1}^{k+1} t_p = 1 - \sum_{p=1}^{k} t_p - t_{k+1} = \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}) - r_{N-k} \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}) = \prod_{p=1}^{k+1} (1 - r_{N-p+1}),$$

тобто рівність (7) справджується для значення $k+1$, отже, справджується і для всіх значень $k,\ 1\le k\le N$.

Покажемо, що

$$t_k\left(1-\sum_{p=1}^{k}t_p\right)=r_N\,(1-r_N)\,,\ \ k=1,\dots,N. \tag{8}$$

Із співвідношень (5) випливає, що

$$0<r_{k+1}<1,\ r_k\,(1-r_k)=\frac{r_{k+1}}{1-r_{k+1}},\ \ k=1,2,\dots. \tag{9}$$

Перевіримо правильність рівності (9) для $k=1,\ 2$:

$$t_1\,(1-t_1)=r_N\,(1-r_N)\,,$$

$$t_2\,(1-t_1-t_2)=r_{N-1}\,(1-r_N)\cdot(1-r_{N-1})\,(1-r_N)=r_N\,(1-r_N)\,.$$

Нехай рівність (8) справджується для деякого значення $k,\ 1\le k<N$. Тоді з (6), (8) і (9) випливає, що

$$t_{k+1}\left(1-\sum_{p=1}^{k+1}t_p\right)=r_{N-k}\prod_{l=1}^{k}(1-r_{N-l+1})\cdot\prod_{l=1}^{k+1}(1-r_{N-l+1})$$

$$=r_{N-k}\,(1-r_{N-k})\prod_{l=1}^{k}(1-r_{N-l+1})^2=\frac{r_{N-k+1}}{1-r_{N-k+1}}\,(1-r_{N-k+1})^2\prod_{l=1}^{k-1}(1-r_{N-l+1})^2$$

$$=r_{N-k+1}\prod_{l=1}^{k-1}(1-r_{N-l+1})\cdot\prod_{l=1}^{k}(1-r_{N-l+1})=t_k\left(1-\sum_{p=1}^{k}t_p\right)=r_N\,(1-r_N)\,.$$

Таким чином, рівність (8) справджується для всіх значень $k,\ 1\le k\le N$.

Нехай елементи послідовності $\{R_k\}$ визначаються у такий спосіб:

$$R_k=r_k\,(1-r_k)\,,\ \ k=1{,}2,\dots\,,$$

де послідовність $\{r_k\}$ означена за допомогою співвідношень (5). Тоді

$$0<R_1=r_1\,(1-r_1)\le\frac{1}{4},$$

$$R_{k+1}=r_{k+1}\,(1-r_{k+1})=\frac{r_k\,(1-r_k)}{r_k\,(1-r_k)+1}\cdot\frac{1}{r_k\,(1-r_k)+1}=\frac{R_k}{(R_k+1)^2},\ \ k=1{,}2,\dots\,.$$

Враховуючи рівності (3), (8), доходимо висновку про правильність твердження 2. □

Твердження 3. *Для елементів послідовності $\{R_m\}$, які визначаються співвідношеннями (4), справджується оцінка*

$$\frac{1}{2(m-1)+\dfrac{1}{R_1}+\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2k}}\le R_m\le\frac{1}{2(m+1)+R_1},\ \ m=2,3,\dots. \tag{10}$$

Доведення. Використовуємо метод математичної індукції. Покажемо спочатку, що

$$\frac{1}{R_m}\ge R_1+2(m+1),\ \ m=2,3,\ ,\dots. \tag{11}$$

Перевіримо правильність нерівності (11) для $m=2$. Із співвідношень (4) випливає, що

$$\frac{1}{R_2}=R_1+\frac{1}{R_1}+2\ge R_1+4+2=R_1+2\cdot 3,$$

тобто для $m=2$ нерівність (11) справджується. Припускаючи, що нерівність (11) справджується для деякого $m=k$ і використовуючи (4), одержимо

$$\frac{1}{R_{k+1}}=R_k+\frac{1}{R_k}+2\ge R_k+R_1+2(k+1)+2>R_1+2((k+1)+1),$$

а це означає, що нерівність (11) справджується для всіх $m=2,3,\dots$.

З іншого боку,

$$\frac{1}{R_2}=R_1+\frac{1}{R_1}+2\le\frac{1}{4}+\frac{1}{R_1}+2=\frac{1}{R_1}+2(2-1)+\frac{1}{2\cdot 2},$$

тобто для $m=2$ справджується нерівність

$$\frac{1}{R_m}\le\frac{1}{R_1}+2(m-1)+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2k}. \tag{12}$$

Припускаючи, що нерівність (12) справджується для деякого значення $m>2$ і враховуючи (4), (11), одержимо

$$\frac{1}{R_{m+1}}=R_m+\frac{1}{R_m}+2\le R_m+\frac{1}{R_1}+2(m-1)+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2k}+2\le$$

$$\le\frac{1}{R_1+2(m+1)}+\frac{1}{R_1}+2m+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2k}<\frac{1}{R_1}+2((m+1)-1)+\sum_{k=2}^{m+1}\frac{1}{2k},$$

отже, нерівність (12) справджується для довільних $m=2,3,\dots$. З нерівностей (11), (12) випливає правильність нерівності (10). □

Зауваження. *Оскільки*

$$R_N-\frac{1}{4N}\ge\frac{1}{2(N-1)+\displaystyle\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2k}+\frac{1}{R_1}}-\frac{1}{4N}>\frac{1}{\dfrac{9}{4}(N-1)+\dfrac{1}{R_1}}-\frac{1}{4N},\ \ N\ge 2,$$

то за умови $R_1>\dfrac{4}{7N+9}$ *виконується нерівність* $R_N>\dfrac{1}{4N}$ *, тобто радіус круга з центром у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД вигляду(1) з N гілками розгалужень, може бути більшим, ніж радіус круга з центром* *у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД загального вигляду з N гілками розгалужень.*

Значення R_k, $k=2,3,\dots$, які визначаються співвідношеннями (4), залежать від R_1, $R_k<\frac{1}{4}$, а функція $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ монотонно зростає для $0<x<1$. Тому

$$R_k(R_1)\le R_k\left(\frac{1}{4}\right)=R_k^*,\ k=2,3,\dots,$$

де $\{R_k^*\}$ – послідовність додатних чисел, що визначаються у такий спосіб:

$$R_1^*=\frac{1}{4},\ R_{k+1}^*=\frac{R_k^*}{(R_k^*+1)^2},\ k=1,2,\dots. \tag{13}$$

Згідно з твердженням 3 правильною є така оцінка:

$$\frac{1}{2(N+1)+\sum\limits_{k=2}^{N}\frac{1}{2k}}\le R_N^*\le\frac{4}{8(N+1)+1},\ N=2,3,\dots.$$

Твердження 4. *ГЛД вигляду*

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-R}{1^{i_k}},\ R>0, \tag{14}$$

з N гілками розгалуження ($i_0=N$) збігається тоді і лише тоді, коли

$$R\le R_N^*, \tag{15}$$

де $\{R_k^*\}$ — послідовність додатних чисел, що визначаються рівностями (13). Значення ГЛД (14) дорівнює

$$(1-r_1)(1-r_2)\dots(1-r_N),$$

де

$$r_N=\frac{1-\sqrt{1-4R}}{2}, \tag{16}$$

$$r_k=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-5r_{k+1}}{1-r_{k+1}}}\right),\ k=N-1,N-2,\dots,1. \tag{17}$$

Доведення. За умов (15), (13) для ГЛД (14) виконуються умови тверджень 1 і 2. Тому, враховуючи твердження 2 і зауваження, доходимо висновку про достатність умов (15), (13) для збіжності ГЛД (14).

n-й підхідний дріб ГЛД (14), $n=0,1,\dots$, дорівнює його деякому залишку, а саме:

$$\tilde f_n=1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-R}{1^{i_k}}=1+\mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{n+1}\sum_{i_p=1}^{i_{p-1}}\frac{-R}{1^{i_p}}=\tilde Q_{i(1)}^{(n+1)},\ i_1=i_0. \tag{18}$$

Розв'язуючи рівняння (17) відносно r_{k+1}, отримаємо

$$r_{k+1}=\frac{r_k(1-r_k)}{r_k(1-r_k)+1},$$

отже, за умов (16), (17) для r_1, r_2, ..., r_N виконуються співвідношення (5).

Оскільки для ГЛД (14) справджуються умови тверджень 1 і 2, то для його залишків є правильною оцінка типу (3). Враховуючи рівності (6), (7) і (18), одержимо

$$\tilde f_n\ge(1-r_1)(1-r_2)\dots(1-r_N). \tag{19}$$

Доведення необхідності проводимо за індукцією по кількості розгалужень ГЛД вигляду (14). Позначимо через $f_{k,m}$ k-й підхідний дріб ГЛД вигляду (14) з m гілками розгалуження.

У випадку $m=1$ ГЛД (14) перетворюється на звичайний неперервний дріб

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{-R}{1^k},\ R>0,$$

який збігається тоді і лише тоді, коли $R\le R_1^*=\frac{1}{4}$ [4], причому

$$\lim_{k\to\infty}f_{k,1}=\frac{1+\sqrt{1-4R}}{2}=1-r_1,$$

де $r_1=\frac{1-\sqrt{1-4R}}{2}$.

Якщо $m\ge2$, тоді

$$f_{k+1,m}=f_{k+1,m-1}-\frac{R}{f_{k,m}},\quad k=0,1,\dots,\ m=2,3,\dots,$$

або

$$f_{k+1,m}+\frac{R}{f_{k,m}}=f_{k+1,m-1},\quad k=0,1,\dots,\ m=2,3,\dots. \tag{20}$$

Припустимо, що ГЛД (14) з $m=2$ збігається. Тоді

$$\lim_{k\to\infty}\left(f_{k+1,2}+\frac{R}{f_{k,2}}\right)=\lim_{k\to\infty}f_{k+1,1},$$

отже, $R\le\frac{1}{4}$, і можна записати, що $R=r_2(1-r_2)$, де $r_2=\frac{1-\sqrt{1-4R}}{2}$, і $\lim\limits_{k\to\infty}f_{k+1,1}=1-r_2$. З урахуванням припущення про збіжність ГЛД (14) з $m=2$ доходимо висновку, що $F_2=\lim\limits_{k\to\infty}f_{k,2}\ne0$ при $R\le\frac{1}{4}$, а F_2 є дійсним коренем рівняння

$$F_2^2-(1-r_2)F_2+r_2(1-r_2)=0. \tag{21}$$

Дискримінант рівняння (21)

$$D=(1-r_2)^2-4r_2(1-r_2)=(1-r_2)(1-5r_2)$$

буде невід'ємним за вище наведених припущень лише тоді, коли

$$r_2 \le r_2^* = \frac{1}{5},$$

а

$$r_2^*\left(1 - r_2^*\right) = \frac{4}{25} = R_2^*.$$

У випадку $D > 0$ рівняння (21) має два корені:

$$\frac{1 - r_2 - \sqrt{(1 - r_2)(1 - 5r_2)}}{2}; \quad \frac{1 - r_2 + \sqrt{(1 - r_2)(1 - 5r_2)}}{2}.$$

Нехай

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_2}{1 - r_2}}\right).$$

Тоді у випадку $D > 0$ менший з коренів рівняння дорівнює $(1 - r_2)\,r_1$, а більший – $(1 - r_2)(1 - r_1)$.

Враховуючи нерівність (19), доходимо висновку, що

$$F_2 = \lim_{k\to\infty} f_{k,2} \ge (1 - r_2)(1 - r_1),$$

отже,

$$F_2 = (1 - r_2)(1 - r_1) = \frac{1 - r_2 + \sqrt{(1 - r_2)(1 - 5r_2)}}{2}.$$

Таким чином, твердження 4 правильне для ГЛД вигляду (14) з двома гілками розгалужень ($i_0 = 2$).

Припустимо, що твердження 4 правильне для ГЛД (14) з m гілками розгалужень, $m \ge 2$. Розглянемо необхідні умови збіжності ГЛД вигляду (14), кількість гілок розгалужень якого дорівнює $m+1$. Використовуючи (20) і міркуючи аналогічно, як у випадку $m = 2$, маємо

$$R \le R_m^*, \ \lim_{k\to\infty}\left(f_{k+1,m+1} + \frac{R}{f_{k,m+1}}\right) = \lim_{k\to\infty} f_{k+1,m} = F_m = \prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k),$$

де

$$r_{m+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4R}}{2}, \ r_k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_{k+1}}{1 - r_{k+1}}}\right), \ k = m, \ldots, 2.$$

Значення $F_{m+1} = \lim\limits_{k\to\infty} f_{k,m+1}$ — дійсний корінь рівняння

$$F_{m+1}^2 - \prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k)\,F_{m+1} + r_{m+1}(1 - r_{m+1}) = 0,$$

дискримінант якого дорівнює

$$D = \prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k)^2 - 4r_{m+1}(1 - r_{m+1}). \tag{22}$$

Для елементів послідовності $\{r_k\}$ і довільного натурального числа m справджується рівність

$$\prod_{k=l}^{m}(1 - r_k)^2 = \frac{1 - r_l}{r_l} r_m (1 - r_m), \ 1 \le l \le m. \tag{23}$$

Дійсно, при $m = l$ рівність (23) очевидна:

$$(1 - r_m)^2 = \frac{1 - r_m}{r_m} r_m (1 - r_m).$$

Якщо рівність (23) справджується для деякого значення l, $2 \le l \le m$, то

$$\prod_{k=l-1}^{m}(1 - r_k)^2 = (1 - r_{l-1})^2 \frac{1 - r_l}{r_l} r_m (1 - r_m) =$$

$$= (1 - r_{l-1})^2 \frac{1}{r_{l-1}(1 - r_{l-1})} r_m (1 - r_m) = \frac{(1 - r_{l-1})}{r_{l-1}} r_m (1 - r_m),$$

отже, рівність (23) справджується для всіх $l, 1 \le l \le m$.

Тому

$$r_{m+1}(1 - r_{m+1}) = \frac{r_2}{1 - r_2}\prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k)^2. \tag{24}$$

Підставляючи рівність (24) у вираз (22), отримаємо

$$D = \prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k)^2\left(1 - 4\frac{r_2}{1 - r_2}\right) \ge 0 \Rightarrow r_2 \le r_2^* \le \frac{1}{5},$$

$$R_{m+1} = r_{m+1}(1 - r_{m+1}) \le r_{m+1}^*\left(1 - r_{m+1}^*\right) \le R_{m+1}^*.$$

Враховуючи оцінку (19), доходимо висновку, що

$$F_{m+1} = \frac{1}{2}\prod_{k=2}^{m+1}(1 - r_k)\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_2}{1 - r_2}}\right) = \prod_{k=1}^{m+1}(1 - r_k),$$

отже, твердження 4 правильне і для ГЛД вигляду (14), кількість гілок розгалужень якого дорівнює $m + 1$. □

Таким чином, N-й член послідовності $\{R_m^*\}$, яка визначається співвідношеннями (13), — це максимально можливий радіус круга з центром у початку координат, який є множиною абсолютної збіжності ГЛД (14) з N гілками розгалужень.

Література

1. Антонова Т.М., Боднар Д.І. *Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. — 2000. — Т.31. — С. 5–18.

2. Баран О.Є. *Аналог ознаки Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т.39, №2. — С. 39–46.

3. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наук. думка, 1986. — 176 с.

4. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

5. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача, 2010. — 218 с.

6. Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. — К.: Наук. думка, 1994. — 206 с.

Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна
e-mail: *tamara_antonova@ukr.net*

Надійшло 19.09.2012

Antonova T.M. *On simple circular sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 165–174.

The radiuses of the circles with centre in origin of coordinates that are simple sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form have been investigated.

Антонова Т.Н. *О простых круговых множествах абсолютной сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 165–174.

Исследованы значения радиусов кругов с центром в начале координат, являющихся простыми множествами абсолютной сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.97

Бак С.М.

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Бак С.М. *Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 175–196.

Розглядається система диференціальних рівнянь, яка описує динаміку нескінченної системи осциляторів на двовимірній гратці. Отримано результат про існування періодичних за часом розв'язків. За допомогою теореми про гірський перевал отримані достатні умови існування таких розв'язків.

Вступ

У цій статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на плоскій цілочисловій гратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Припускається, що кожен осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m})$$
$$+b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Якщо $a_{n-1,m} = a_{n,m} = b_{n,m-1} = b_{n,m} \equiv 1$, то лінійна частина правої частини рівняння дорівнює $(\triangle q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що задовольняють крайову умову на нескінченності:

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0. \tag{2}$$

Ця умова означає, що осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35Q55, 35Q51, 39A12.
Ключові слова і фрази: система осциляторів, періодичні розв'язки, теорема про гірський перевал.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [11], [13], [14]. В статтях [1], [5], [15] та [16] вивчались біжучі хвилі в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних гратках, а в статтях [2] і [3] — питання коректності задачі Коші для таких систем.

У цій статті отримано умови існування періодичних за часом розв'язків нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній гратці. Дана робота узагальнює результати, отримані в [6], на випадок двовимірної гратки.

1 Постановка задачі та основні припущення

Розглянемо систему осциляторів з потенціалом:

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r),$$

і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1}+$$
$$+c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння розглядаємо як диференціально-операторне

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де A — оператор лінійної взаємодії осциляторів, який визначається рівністю

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$$

(такі оператори вивчались в [7]), а нелінійний оператор B —

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}), \tag{5}$$

в просторі $l_2 = l_2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,m}q^{(2)}_{n,m}.$$

Скалярний добуток і норму в l_2 позначатимемо відповідно $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$.

Далі нам також знадобиться простір l^∞ — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m\in\mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Зауважимо, що рівняння (3) у просторі l_2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = H'_p(p,q) \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 - (Aq,q)\right) + \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l_2.

Всюди далі припускається, що

(i) *коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}$ і $c_{n,m}$ є N-періодичними, тобто $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}$, і A — додатно визначений в l_2, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що*

$$(Aq,q) \geq \alpha_0\|q\|^2, \quad q \in l_2;$$

(ii) *для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$ функція $V_{n,m}(r)$ — неперервно диференційовна, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ та $V'_{n,m}(r) = o(r)$ при $r \to 0$, і виконується умова N-періодичності $V_{n+N,m}(r) = V_{n,m+N}(r) = V_{n,m}(r)$;*

(iii) *існує таке $\mu > 2$, що*

$$0 < \mu V_{n,m}(r) \leq V'_{n,m}(r)r, \quad r \neq 0.$$

З умови (i) випливає, що оператор A є обмеженим самоспряженим в l_2.

Лема 1.1. *Нехай $V_{n,m}$ задовольняє умови (ii) та (iii). Тоді існують такі константи $d > 0$ та $d_0 \geq 0$, які не залежать від n і m, що*

$$V_{n,m}(r) \geq d|r|^\mu - d_0. \tag{6}$$

Доведення. Зафіксуємо $r_0 > 0$. Оскільки

$$V'_{n,m}(r) \geq \mu\frac{V_{n,m}(r)}{r},$$

то згідно стандартних результатів про диференціальні нерівності [10], $V_{n,m}(r) \geq y(r)$ при $r \geq r_0$, де $y(r)$ — розв'язок диференціального рівняння

$$y'(r) = \frac{\mu}{r}y(r)$$

з початковою умовою $y(r_0) = V_{n,m}(r_0)$. Останній можна знайти в явному вигляді

$$y(r) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}r^\mu.$$

Отже,

$$V_{n,m}(r) \geq \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}r^\mu, \quad r \geq r_0.$$

Тоді для всіх $r \geq 0$

$$V_{n,m}(r) \geq V_{n,m}(r_0)\left(\frac{r^\mu}{r_0^\mu}-1\right) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}r^\mu - V_{n,m}(r_0).$$

Аналогічно, для $r \leq 0$

$$V_{n,m}(r) \geq \frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}|r^\mu| - V_{n,m}(r_0).$$

Звідси отримуємо (6) з

$$d = \inf_{n,m} \min\left[\frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}, \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}\right],$$

$$d_0 = \sup_{n,m} \max\left[V_{n,m}(r_0), V_{n,m}(-r_0)\right].$$

□

Лема 1.2. *Нехай виконуються умови (ii) та (iii). Тоді існує така неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(r), r \geq 0$, *що*

$$\sigma(0) = 0, \lim_{r\to+\infty}\sigma(r) = +\infty$$

і

$$V'_{n,m}(r)r \leq \sigma(|r|)r^2. \tag{7}$$

Доведення. Покладемо

$$\sigma(r) = \max_{n,m}\sup_{|s|\leq r}\left|\frac{V'_{n,m}(s)}{s}\right|.$$

Нерівність (7), неперервність та монотонність $\sigma(r)$, а також рівність $\sigma(0) = 0$ очевидні. Із умови (iii) та леми 1.1 випливає, що

$$\sigma(r) \geq const \cdot r^{\mu-2}$$

при достатньо великих r. Оскільки $\mu > 2$, то $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ і тому лему доведено. □

Відповідно до умови просторової періодичності системи, природньо розглядати такі періодичні по n і m крайові умови. Нехай $k > 0$ — ціле. Розглянемо рівняння (1) з крайовою умовою

$$q_{n+kN,m} = q_{n,m+kN} = q_{n,m}. \tag{8}$$

Ця задача використовується, як допоміжна, при вивченні періодичних розв'язків задачі (1), (2). Запишемо цю задачу у вигляді диференціально-операторного рівняння. Позначимо через l_2^k простір kN-періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір розмірності $kN \times kN$.

В просторі l_2^k введемо норму

$$\|q\|_k = \left(\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}|q_{n,m}|^2\right)^{1/2}$$

та скалярний добуток

$$(p,q)_k = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} p_{n,m}q_{n,m},$$

де $[\frac{kN}{2}]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

Оператор A діє також і в просторі l_2^k. Цей оператор будемо позначати A_k. Формула (5) показує, що оператор B також діє в l_2^k. Позначимо його через B_k. Тоді задача (1), (8) запишеться у вигляді

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q). \tag{9}$$

Лема 1.3. *Нехай виконується умова (i). Тоді*

$$(A_k q, q) \geq \alpha_0\|q\|_k^2, \quad q \in l_2^k.$$

Доведення. Оскільки A_k — самоспряжений скінченновимірний оператор, то достатньо показати, що для будь-якого його власного значення λ маємо $\lambda \geq \alpha_0$. Якщо λ — власне значення A_k з власним вектором $q \in l_2^k$, то q є узагальненим власним вектором оператора A (див. [8], [19]). Отже, λ — точка спектру оператора A. Оскільки спектр A лежить у множині $[\alpha_0, +\infty)$, отримуємо те, що вимагалося. □

Надалі нам знадобляться деякі простори соболєвського типу. Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T-періодичних функцій із $H^1_{loc}(\mathbb{R}; l_2)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q,p)_T = \int_{-T/2}^{T/2}[(\dot{q}(t),\dot{p}(t)) + (q(t),p(t))]dt.$$

Відповідна норма в X_T позначається через $\|\cdot\|_T$.

Більш явно, простір X_T складається із послідовностей $q = \{q_{n,m}(t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_{n,m}(t)$ і

$$\|q\|_T^2 = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\|q_{n,m}\|^2_{H^1(-T/2,T/2)} < \infty,$$

де

$$\|u\|^2_{H^1(a;b)} = \int_a^b[|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2]dt.$$

Згідно теорем про вкладення (див., напр., [8], [9]), X_T неперервно вкладений в простір $C_T(\mathbb{R}; l_2)$ неперервних T-періодичних функцій зі значеннями в l_2.

Аналогічно, $X_{T,k}$ позначає підпростір $H^1_{loc}(\mathbb{R}, l_2^k)$, що складається із T-періодичних функцій, зі скалярним добутком

$$(q,p)_{T,k} = \int_{-T/2}^{T/2}[(\dot{q}(t),\dot{p}(t))_k + (q(t),p(t))_k]dt$$

і відповідною нормою $\|\cdot\|_{T,k}$. Його елементи — послідовності $q = \{q_{n,m}(t)\}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_n(t)$ і $q_{n+kN,m}(t) = q_{n,m+kN}(t) = q_{n,m}(t)$. Як і вище, $X_{T,k} \subset C_T(\mathbb{R}, l_2^k)$.

Перейдемо безпосередньо до варіаційних постановок для рівнянь (4) та (9). Першому з них відповідає функціонал

$$\Phi(q)=\int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|^2+\frac{1}{2}(Aq(t),q(t))-\sum_{n,m\in\ Z}V_{n,m}(q_{n,m}(t))\right]dt \tag{10}$$

на просторі X_T. Функціонал, що відповідає рівнянню (9), має вигляд

$$\Phi_k(q)=\int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|_k^2+\frac{1}{2}(A_kq(t),q(t))_k-\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}V_{n,m}(q_{n,m}(t))\right]dt \tag{11}$$

та визначений на просторі $X_{T,k}$. Ці функціонали коректно визначені на відповідних просторах. Дійсно, їх квадратичні члени скінченні відповідно до означень просторів X_T та $X_{T,k}$. Неквадратичні члени також скінченні, оскільки, згідно теорем вкладення, $q(t)$ — неперервна функція на $[-T/2,T/2]$ зі значеннями в l_2 або l_2^k відповідно, а згідно (ii),

$$|V_{n,m}(r)|\le C|r|^2$$

на будь-якому скінченному інтервалі зміни r.

Для формулювання наступного результату нагадаємо, що $\langle f,u\rangle$ позначає значення лінійного функціоналу f на елементі u.

Лема 1.4. *Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді функціонали Φ і Φ_k належать класу C^1, а їх похідні задаються формулами*

$$\langle\Phi'(q),h\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\left[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt \tag{12}$$

$$\langle\Phi_k'(q),h\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\left[(\dot q(t),\dot h(t))_k+(A_kq(t),h(t))_k-\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt, \tag{13}$$

для $h\in X_T$ та $h\in X_{T,k}$ відповідно.

Доведення. Розглянемо функціонал Φ. Нехай $q\in X_T, h\in X_T$ та $|\lambda|\le 1$. Тоді

$$\Phi(q+\lambda h)=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|^2+\lambda(\dot q(t),\dot h(t))+\frac{1}{2}\lambda^2\|\dot h(t)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}(Aq(t)+\lambda Ah(t),q(t)+\lambda h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))dt$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|^2+\lambda(\dot q(t),\dot h(t))+\frac{1}{2}\lambda^2\|\dot h(t)\|^2+\frac{1}{2}(Aq(t),q(t))$$

$$+\lambda(Aq(t),h(t))+\frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))]dt.$$

Оскільки

$$\Phi(q+\lambda h)-\Phi(q)=\int_{-T/2}^{T/2}[\lambda(\dot q(t),\dot h(t))+\frac{1}{2}\lambda^2\|\dot h(t)\|^2+\lambda(Aq(t),h(t))$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}(V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))-V_{n,m}(q_{n,m}(t)))]dt,$$

то

$$\langle\Phi'(q),h\rangle=\lim_{\lambda\to0}\frac{\Phi(q+\lambda h)-\Phi(q)}{\lambda}=\int_{-T/2}^{T/2}[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-$$

$$-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\lim_{\lambda\to0}\frac{V_{n,m}(q_{n,m}(t)+\lambda h_{n,m}(t))-V_{n,m}(q_{n,m}(t))}{\lambda h_{n,m}(t)}h_{n,m}(t)]dt$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)]dt.$$

Неважко переконатися, що похідна $\Phi'(q)$, задана формулою (12), неперервна по $q\in X_T$. Випадок Φ_k аналогічний. □

Наступне твердження зводить знаходження T-періодичних розв'язків рівнянь (4) та (9) до пошуку критичних точок відповідних функціоналів.

Лема 1.5. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді критичні точки функціоналів Φ та Φ_k є T-періодичними розв'язками рівнянь (4) та (9) відповідно.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок функціоналу Φ. Другий випадок аналогічний.

Якщо $q\in X_T$ — критична точка функціоналу Φ, то за лемою 1.4

$$\langle\Phi'(q),h\rangle=\int_{-T/2}^{T/2}\left[(\dot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt=0$$

для будь-якого $h\in X_T$. Або, інтегруючи частинами перший доданок, маємо

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left[(-\ddot q(t),\dot h(t))+(Aq(t),h(t))-\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)\right]dt=0$$

для будь-якого $h\in X_T$. Це означає, що q — слабкий розв'язок рівняння (4).

Отже,

$$\ddot q=Aq-B(q)$$

в сенсі узагальнених функцій. Однак за теоремою вкладення $q\in C(\mathbb{R},l_2)$. Отже, $Aq\in C(\mathbb{R},l_2)$ і, згідно умови (ii), $B(q)\in C(\mathbb{R},l_2)$. Таким чином, $\ddot q\in C(\mathbb{R},l_2)$ і значить, q — двічі неперервно диференційовна функція зі значеннями в l_2. Оскільки за означенням простору X_T q є T-періодичною функцією, то q — T-періодичний розв'язок рівняння (4). □

Далі нам знадобиться наступна проста лема, яка дає нерівність між нормами критичних точок і відповідними критичними значеннями для функціоналів Φ_k і Φ.

Лема 1.6. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існують такі константи* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $c > 0$, *які не залежать від* k, *що для будь-якої критичної точки функціоналів* Φ *або* Φ_k

$$\varepsilon_0 \le \|q\|^2 \le c\Phi(q)$$

або

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_k^2 \le c\Phi_k(q)$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу Φ. Випадок Φ_k аналогічний. Нехай $q \in l_2$ — критична точка Φ. Тоді $\Phi'(q) = 0$ і

$$\Phi(q) = \Phi(q) - \frac{1}{\mu}\langle \Phi'(q), q\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt$$

$$- \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}(V_{n,m}(q_{n,m}(t)) - \frac{1}{\mu}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t))dt.$$

Згідно умов (i) та (iii),

$$\Phi(q) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\int_{-T/2}^{T/2}(\|\dot q(t)\|^2 + \alpha_0\|q(t)\|^2)dt$$

$$\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\|q\|_T^2,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Звідси випливає те, що вимагалося в другій нерівності.

Далі, оскільки $\langle\Phi'(q), q\rangle = 0$, то

$$\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t)dt.$$

А тому

$$\beta_0\|q\|_T^2 \le \int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot q(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\}dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t)dt.$$

Використовуючи лему 1.2, отримуємо

$$\beta_0\|q\|_T^2 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^\infty)})\cdot\|q\|_T^2.$$

Оскільки $q \ne 0$, то звідси випливає, що

$$\beta_0 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^\infty)}).$$

Згідно теореми вкладення,

$$\beta_0 \le \sigma(\|q\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2)}) \le \sigma(C\cdot\|q\|_T)$$

з деяким $C > 0$.

Тепер достатньо покласти

$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1}\cdot\sigma^{-1}(\beta_0),$$

і лему доведено. □

При доведенні основної теореми нам знадобиться одна проста властивість стаціонарних розв'язків. Зауважимо, що будь-який стаціонарний, що не залежить від t, розв'язок систем, які розглядалися вище, є T-періодичним для будь-якого $T > 0$. Стаціонарні розв'язки задовольняють рівняння

$$Aq = B(q) \tag{14}$$

або

$$A_kq = B_k(q) \tag{15}$$

в залежності від граничних умов. Зауважимо, що обмеження функціоналів Φ та Φ_k на простори сталих функцій мають вигляд $T\cdot\varphi(q)$ і $T\cdot\varphi_k(q)$, де

$$\varphi(q) = \frac{1}{2}(Aq, q) - \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}V_{n,m}(q_{n,m}), \quad q\in l_2,$$

$$\varphi_k(q) = \frac{1}{2}(A_kq, q)_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}V_{n,m}(q_{n,m}), \quad q\in l_2^k.$$

Отже, сталі розв'язки рівнянь (14) і (15) є критичними точками функціоналів φ та φ_k відповідно. Причому, при виконанні умов (i)–(iii) $q\equiv 0$ є тривіальним стаціонарним розв'язком.

Лема 1.7. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існує така константа* $\delta_0 > 0$, *яка не залежить від* k, *що для будь-якого ненульового розв'язку* $q \in l_2^k$ *(відповідно* $q\in l_2$*) рівняння (15) (відповідно (14))*

$$\|q\|_k \ge \delta_0$$

(відповідно

$$\|q\| \ge \delta_0).$$

Крім того,

$$\varphi_k(q) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2,$$

$$\varphi(q) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок рівняння (15). Помноживши його скалярно на q, маємо

$$(A_k q, q)_k = (B_k(q), q)_k.$$

Згідно умови (i), отримуємо

$$\alpha_0 \|q\|_k^2 \le (B_k(q), q)_k = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} V'_{n,m}(q_{n,m}) q_{n,m}. \tag{16}$$

За лемою 1.2

$$V'_n(r) r \le \sigma(|r|) r^2, \tag{17}$$

де функція $\sigma(r), r \ge 0$, неперервна, монотонно зростає, $\sigma(0) = 0$ і $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

Із нерівності (16) отримуємо, що

$$\alpha_0 \|q\|_k^2 \le \sigma(\|q\|_k) \|q\|_k^2.$$

Оскільки $q \ne 0$, то

$$\sigma(\|q\|_k) \ge \alpha_0 > 0,$$

отже,

$$\|q\|_k \ge \beta_0 = \sigma^{-1}(\alpha_0) > 0.$$

Доведемо другу частину леми. Оскільки q — критична точка φ_k, то $\varphi'_k(q) = 0$. Отже,

$$\varphi_k(q) = \varphi_k(q) - \frac{1}{\mu} \langle \varphi'_k(q), q \rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)(A_k q, q)_k - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \left(V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{\mu} V'_{n,m}(q_{n,m}) q_{n,m} \right).$$

Згідно умов (i) та (iii),

$$\varphi_k(q) \ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \cdot \alpha_0 \|q\|_k^2 \ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \cdot \alpha_0 \beta_0^2,$$

тобто лему доведено. □

2 Основні результати

Доведемо спочатку існування T-періодичних розв'язків рівняння (9). Ця задача має незалежний інтерес, однак результат про існування її розв'язків буде використано для доведення існування T-періодичних розв'язків рівняння (4).

Для побудови шуканих розв'язків, згідно леми 1.5, достатньо знайти нетривіальні критичні точки функціоналу Φ_k в просторі $X_{T,k}$. З цією метою буде використана теорема про гірський перевал.

Наведемо спочатку деякі попередні відомості. Нехай φ — C^1-функціонал на гільбертовому просторі H. Говорять, що φ задовольняє умову Пале–Смейла, якщо виконується наступна умова:

(PS) Нехай $u^{(m)}$ — така послідовність елементів H, що послідовність $\varphi(u^{(m)})$ обмежена і $\varphi'(u^{(m)}) \to 0$. Тоді $u^{(m)}$ містить збіжну підпослідовність.

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна без обмеження загальності вважати, що числова послідовність $\varphi'(u^{(m)})$ збігається.

Сформулюємо тепер теорему про гірський перевал в необхідній нам формі (доведення див. в [18], [20]).

Теорема (Про гірський перевал). *Нехай φ — C^1-функціонал на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$, що задовольняє умову Пале–Смейла. Припустимо, що існує $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і*

$$\beta = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \ge \varphi(e). \tag{18}$$

Нехай

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\tau \in [0,1]} \varphi(\gamma(\tau)), \tag{19}$$

де

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0;1]; H) : \gamma(0) = 0, \varphi(\gamma(1)) \le 0\}. \tag{20}$$

Тоді b — критичне значення функціоналу φ і $b \ge \beta$.

Зауваження 2.1. *Нехай $\gamma_0 \in \Gamma$ — деякий елемент (шлях). З побудови критичного значення b маємо*

$$b \le \max_{\tau \in [0,1]} \varphi(\gamma_0(\tau)).$$

Це дозволяє оцінити критичні значення зверху.

В наступних лемах перевіряються умови цієї теореми для функціоналу Φ_k. Той факт, що Φ_k — функціонал класу C^1, вже встановлено в лемі 1.4.

Лема 2.1. *При виконанні умов (i)–(iii) функціонал Φ_k задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $u^{(p)} \in X_{T,k}$ — така послідовність, що $\Phi'_k(u^{(p)}) \to 0$ і $\Phi_k(u^{(p)}) \le C$. Тоді

$$\Phi_k(u^{(p)}) - \frac{1}{\mu} \langle \Phi'_k(u^{(p)}), u^{(p)} \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot{u}^{(p)}(t)\|_k^2$$

$$+ (A_k u^{(p)}(t), u^{(p)}(t))_k\} dt - \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \{V_{n,m}(u_{n,m}^{(p)}(t))$$

$$- \frac{1}{\mu} V'_{n,m}(u_{n,m}^{(p)}(t)) u_{n,m}^{(p)}(t)\} dt \ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \beta_0 \|u^{(p)}\|_{T,k}^2,$$

де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. При достатньо великому p маємо

$$|\langle \Phi'_k(u^{(p)}), u^{(p)} \rangle| \le \mu.$$

Тому
$$\frac{\mu-2}{2\mu}\beta_0\|u^{(p)}\|_k^2 \le C + \|u^{(p)}\|_{T,k}.$$
Остання нерівність не може виконуватися для необмеженої послідовності $u^{(p)}$. Таким чином, вже доведено, що послідовність $u^{(p)}$ — обмежена.

Оскільки простір $X_{T,k}$ — гільбертів, а послідовність $u^{(p)}$ — обмежена, то, переходячи до підпослідовності, вважаємо, що $u^{(p)} \to u$ слабко в $X_{T,k}$. Оскільки простір l_2^k — скінченновимірний, то вкладення $X_{T,k} \subset C(-T/2, T/2; l_2^k)$ — компактне. Тому $u^{(p)} \to u$ сильно в $C(-T/2, T/2; l_2^k)$.

Маємо
$$\langle \Phi_k'(u^{(p)}) - \Phi_k'(u^{(l)}), u^{(p)} - u^{(l)}\rangle = \int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot u^{(p)}(t) - \dot u^{(l)}(t)\|_k^2$$
$$+(A_k u^{(p)}(t) - A_k u^{(l)}(t), u^{(p)}(t) - u^{(l)}(t))_k\}dt - \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V'_{n,m}(u^{(p)}_{n,m}(t))$$
$$-V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t)\}(u^{(p)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t))dt \ge \beta_0\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k}^2$$
$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V'_n(u^{(p)}_{n,m}(t)) - V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t))\}(u^{(p)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t))dt,$$
де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Отже,
$$\beta_0\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k}^2 \le \langle \Phi_k'(u^{(p)}) - \Phi_k'(u^{(l)}), u^{(p)} - u^{(l)}\rangle$$
$$+\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\{V'_{n,m}(u^{(p)}_{n,m}(t)) - V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t)\}(u^{(p)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t))dt. \tag{21}$$
Оскільки $\Phi_k'(u^{(p)}) \to 0$ сильно, а $u^{(p)}$ — обмежена, то перший член в правій частині (21) прямує до нуля при $p, l \to \infty$. Другий член також збігається до нуля, оскільки $u^{(p)} \to u$ сильно в $C(-T/2, T/2; l_2^k)$. Отже, $\|u^{(p)} - u^{(l)}\|_{T,k} \to 0$ при $p, l \to \infty$. Таким чином, $u^{(p)}$ — послідовність Коші в $X_{T,k}$. Враховуючи перехід до підпослідовності на початку доведення, отримуємо те, що вимагалося. □

Лема 2.2. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді існують такі $r_0 > 0$ і $e \in X_T$ з $\|e\|_k > r_0$, що*
$$\inf_{\|u\|_{T,k}=r_0}\Phi_k(u) > 0 \tag{22}$$
і $\Phi_k(e) \le 0$. Число r_0 може бути вибране таким, що не залежить від k.

Доведення. Використаємо нерівність (17). Згідно (iii),
$$V_{n,m}(r) \le \mu^{-1}\sigma(|r|)r^2.$$

Маємо
$$\Phi_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot u(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt - \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}V_{n,m}(u_{n,m}(t))dt$$
$$\ge \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot u(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_k)\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}|u_{n,m}(t)|^2dt.$$
Використовуючи (i) і той факт, що другий інтеграл в правій частині більший за $\|u\|_{T,k}^2$, отримуємо
$$\Phi_k(u) \ge \frac{\beta_0}{2}\|u\|_{T,k}^2 - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_{T,k})\|u\|_{T,k}^2$$
$$= \{\frac{\beta_0}{2} - \mu^{-1}\sigma(\|u\|_k)\}\|u\|_{T,k}^2,$$
де $\beta_0 = \min(1, \alpha_0)$. Виберемо r_0 із умови $\sigma(r_0) = \mu\beta_0/4$. Отримаємо
$$\Phi_k(u) \ge \frac{\beta_0}{4}r_0^2,$$
що доводить (22).

Для доведення другого твердження зафіксуємо ненульовий елемент $u \in X_{T,k}$. Згідно леми 1.1, маємо при $\tau > 0$
$$\Phi_k(\tau u) = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\tau\dot u(t)\|_k^2 + (A_k(\tau u(t)), \tau u(t))_k\}dt$$
$$-\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}V_{n,m}(\tau u_n(t))dt$$
$$\le \frac{\tau^2}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\{\|\dot u(t)\|_k^2 + (A_k u(t), u(t))_k\}dt$$
$$-d\tau^\mu\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}|u_{n,m}(t)|^\mu dt + Nd_0T.$$
Оскільки $\mu > 2$, то при достатньо великому $\tau > 0$ маємо $\Phi_k(\tau u) < 0$. Таким чином, твердження леми виконується з $e = \tau u$. □

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-яких $T > 0$ і натурального k рівняння (9) має ненульовий T-періодичний розв'язок $q = q^{(T,k)}$. При цьому для будь-якого $T > 0$ існують такі константи $\varepsilon_0 > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k, що*
$$\varepsilon_0 \le \|q^{(T,k)}\| \le C,$$
$$\varepsilon_0 \le \Phi_k(q^{(T,k)}) \le C.$$
Більше того, існує таке $T_0 > 0$, яке не залежить від k, що $q^{(T,k)}$ не є сталою функцією і залежить від t при всіх $T \ge T_0$.

Доведення. Згідно лем 2.1 і 2.2, для функціоналу Φ_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Таким чином, існування розв'язку $q \neq 0$ доведено. Залишається перевірити, що при достатньо великих T розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не є сталим.

Нехай $q^{(0)}$ — деякий сталий розв'язок. Тоді, згідно леми 1.7, для відповідного критичного значення $\Phi_k(q^{(0)})$ маємо

$$\Phi_k(q^{(0)}) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 \cdot T, \tag{23}$$

де $\delta_0 > 0$ з леми 1.7.

Тепер оцінимо $\Phi_k(q^{(T,k)}) = \Phi_k(q)$ зверху. Нехай $u \in X_T, u \neq 0$. Тоді, як показано в доведенні леми 2.2, $\Phi_k(\tau u) \leq 0$ при всіх достатньо великих $\tau > 0$. Згідно зауваження 2.1, для критичного значення маємо

$$\Phi_k(q) \leq \max_{\tau \geq 0} \Phi_k(\tau u). \tag{24}$$

Візьмемо в якості $u(t)$ таку функцію, що $u_{n,m}(t) \equiv 0$ при $(n, m) \neq (0, 0)$, $u_{0,0}(t) = \sin(2\pi t/\eta T)$ при $0 \leq t \leq \eta T$ і $u_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T \leq t \leq T$, де $\eta \in (0, 1)$ буде вибрано пізніше. Припускається, що $u_{0,0}(t)$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція. Тоді, використовуючи лему 1.1, одержуємо

$$\Phi_k(\tau u) = \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T} \{|\dot{u}_{0,0}(t)|^2 + c_{0,0}|u_{0,0}(t)|^2\}dt - \int_0^{\eta T} V_{0,0}(\tau u_{0,0}(t))dt$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int_0^{\eta T} \{|\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{\eta T}|^2 + c_{0,0}|\sin\frac{2\pi t}{\eta T}|^2\}dt - d\tau^\mu \int_0^{\eta T} |\sin\frac{2\pi t}{\eta T}|^\mu dt + d_0\eta T. \tag{25}$$

Покладемо

$$A_\mu = \int_0^1 |\sin 2\pi t|^\mu dt.$$

Зауважимо, що

$$A_2 = \int_0^1 \sin^2 2\pi t \cdot dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi t \cdot dt = \frac{1}{2}.$$

Із (25) випливає, що

$$\Phi_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{4}\{\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T\} - dA_\mu(\eta T)\tau^\mu + d_0\eta T.$$

Нехай $T_0 = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$ і $T \geq T_0$. Тоді

$$\frac{4\pi^2}{\eta T} \leq c_{0,0}\eta T$$

і

$$\Phi_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{2}c_{0,0}(\eta T) - dA_\mu\tau^\mu(\eta T) + d_0(\eta T)$$

$$= \eta[\frac{\tau^2}{2}c_{0,0} - dA_\mu\tau^\mu + d_0] \cdot T.$$

Нехай

$$m_0 = \max_{\tau \geq 0}[\frac{\tau^2 c_{0,0}}{2} - dA_\mu\tau^\mu + d_0].$$

Тоді, згідно (24),

$$\Phi_k(q) \leq \eta m_0 T. \tag{26}$$

Виберемо тепер η таким, що

$$\eta < \frac{\mu - 2}{2\mu m_0}\alpha_0\delta_0^2.$$

Тоді з (23) і (26) випливає наступне

$$\Phi_k(q) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T \leq \Phi_k(q^{(0)}).$$

Звідси слідує, що при $T \geq T_0$ розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не може бути сталим. □

Зауваження 2.2. *Зауважимо, що числа η, m_0, так як і α_0, δ_0, не залежать від k і T. Отже, при будь-яких k і $T \geq T_0$ справджується нерівність*

$$\Phi_k(q^{(T,k)}) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T, \tag{27}$$

де $\eta < \frac{\mu-2}{2\mu m_0}\alpha_0\delta_0^2$ — довільне.

Тепер встановимо основний результат статті — існування T-періодичних розв'язків рівняння (4). Розв'язки цього рівняння, за лемою 1.5, є критичними точками функціоналу Φ. Для цього функціоналу справедливим буде твердження аналогічне лемі 2.2. Однак, умова Пале-Смейла не виконується. Ми не будемо це доводити. Зауважимо тільки, що в доведенні леми 2.1 використана компактність відповідного вкладення, яка відсутня у випадку функціоналу Φ.

Таким чином, теорема про гірський перевал не може бути застосована до функціоналу Φ, і тому розв'язки відповідної задачі будуть побудовані як границя розв'язків $q^{(T,k)}$ при $k \to \infty$. Для цього спочатку встановимо дві прості леми. Перша з них отримана в [17], а друга легко з неї слідує.

Лема 2.3. *Нехай $v^{(k)} \in l_2$, причому $\|v^{(k)}\|$ — обмежена і $v^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2$: $v^{(k)} \to 0$ в l_p, де l_p — банахів простір всіх p–сумовних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ з нормою*

$$\|q\|_{l_p} = \left[\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |q_{n,m}|^p\right]^{1/p}.$$

Доведення. Маємо

$$\|v^{(k)}\|_{l_p}^p = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^p = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^{p-2}|v_{n,m}^{(k)}|^2$$

$$\leq \{\sup_{n,m\in\mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|\}^{p-2} \cdot \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |v_{n,m}^{(k)}|^2 = \|v^{(k)}\|_{l^\infty}^p \|v^{(k)}\|^2.$$

Оскільки $p > 2$ і $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$, звідси слідує те, що й вимагалося. □

Перш ніж сформулювати наступну лему, нагадаємо, що $\|\cdot\|_{l_p^k}$ на просторі kN-періодичних послідовностей визначається формулою

$$\|u\|_{l_p^k} = \left[\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} |u_{n,m}|^p\right]^{1/p}.$$

При кожному фіксованому k і різних p ці норми еквівалентні, але ця еквівалентність не є рівномірною по k.

Лема 2.4. *Нехай $u^{(k)} \in l_2^k$, причому $\|u^{(k)}\|_k$ — обмежена і $u^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2$ маємо $\|u^{(k)}\|_{l_p^k} \to 0$.*

Доведення. Визначимо послідовність $v^{(k)} \in l_2$ наступним чином: $v_{n,m}^{(k)} = u_{n,m}^{(k)}$ при $-[\frac{kN}{2}] \le n,m \le kN - [\frac{kN}{2}] - 1$ і $v_{n,m}^{(k)} = 0$ в протилежному випадку. Тоді неважко бачити, що

$$\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \le \|u^{(k)}\|_{l^\infty},$$

$$\|v^{(k)}\|_{l_p} = \|u^{(k)}\|_{l_p^k}.$$

Отже, $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$ і $\|v^{(k)}\| = \|u^{(k)}\|_k$ — обмежена. За лемою 2.3

$$\|v^{(k)}\|_{l_p} = \|u^{(k)}\|_{l_p^k} \to 0$$

для будь-якого $p > 2$, тобто лему доведено. □

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-якого $T > 0$ задача (1), (2), тобто рівняння (4), має ненульовий T-періодичний розв'язок. При цьому існує таке $T_0 > 0$, що при $T \ge T_0$ цей розв'язок не є сталим.*

Доведення. Позначимо через $q^{(k)}(t) = \{q_{n,m}^{(k)}(t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ розв'язок $q^{(T,k)}$, побудований в теоремі 1. Згідно просторової періодичності, $\{q_{n+kN,m}^{(k)}(t)\}$ і $\{q_{n,m+kN}^{(k)}(t)\}$ — також розв'язки задачі (1), (8). За теоремою 1 маємо

$$\varepsilon_0 \le \|q^{(k)}\|_{T,k} \le C, \tag{28}$$

$$\varepsilon_0 \le \Phi_k(q^{(k)}) \le C, \tag{29}$$

де константи $0 < \varepsilon_0 \le C$ не залежать від k. Згідно теореми вкладення, збільшуючи константу C, отримуємо, що

$$\|q^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2;l_2^k)} \le C. \tag{30}$$

Зокрема, для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\|q_{n,m}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)} \le C. \tag{31}$$

Тепер доведемо наступну властивість розв'язків $q^{(k)}$. Для будь-якого k існує таке $n_k \in \mathbb{Z}$, що

$$\|q_{n_k,m_k}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)} \ge \delta \tag{32}$$

з деяким $\delta > 0$, що не залежить від k. Для доведення цього, покладемо

$$u_{n,m}^{(k)} = \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)}.$$

Тоді для $u^{(k)} = \{u_{n,m}^{(k)}\}$

$$\|u^{(k)}\|_{l_2^k}^2 = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)}^2 \le C_1^2 \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{H^1(-T/2,T/2)}^2$$

$$= C_1^2 \|q^{(k)}\|_{T,k}^2 \le C_1^2 C^2$$

з деяким $C_1 > 0$, що не залежить від k. Тут використана неперервність вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

та нерівність (28). Таким чином, $\|u^{(k)}\|_k$ — обмежена. Нерівність (32) означає, що

$$u_{n_k,m_k}^{(k)} \ge \delta$$

з деякими n_k і m_k. Припустимо, що остання нерівність не виконується. Тоді $\|u^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$. Отже, згідно леми 2.4, $\|u^{(k)}\|_{l_p^k} \to 0$ для будь-якого $p > 2$. Однак,

$$\|u^{(k)}\|_{l_p^k}^p = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C(-T/2,T/2)}^p.$$

Оскільки вкладення

$$C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

неперевне, то звідси випливає, що

$$\|u^{(k)}\|_{l_p^k}^p \ge C_2 \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{L^p(-T/2,T/2)}^p$$

$$= C_2 \|q^{(k)}\|_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}^p.$$

Таким чином,

$$\|q^{(k)}\|_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)} \to 0 \tag{33}$$

при $k \to \infty$.

Зафіксуємо тепер довільне $p > 2$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така константа $M = M_\varepsilon > 0$, що

$$|V'_{n,m}(r)| \le \varepsilon|r| + M|r|^{p-1}, \quad |r| \le C. \tag{34}$$

Справді, згідно умови (ii),

$$|V'_{n,m}(r)| \le \varepsilon|r|, \quad |r| \le r_\varepsilon,$$

з деяким $r_\varepsilon > 0$. При $r_\varepsilon \le |r| \le C$ маємо

$$|V'_{n,m}(r)| \le M|r|^{p-1},$$

де

$$M = \max_{n,m} \sup_{r_\varepsilon \le |r| \le C} \frac{|V'_{n,m}(r)|}{|r|^{p-1}}.$$

Звідси випливає (34).

Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка функціоналу Φ_k, то

$$\langle \Phi'_k(q^{(k)}), q^{(k)} \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot q^{(k)}(t)\|_k^2 + (A_k q^{(k)}(t), q^{(k)}(t))_k\} dt$$

$$- \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t)) dt = 0.$$

Використовуючи (34) та (31), отримуємо, що

$$\beta_0 \|q^{(k)}\|^2_{T,k} \le \int_{-T/2}^{T/2} \{\|\dot q^{(k)}(t)\|_k^2 + (A_k q^{(k)}(t), q^{(k)}(t))_k\} dt$$

$$= \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t)) dt$$

$$\le \varepsilon \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} |q^{(k)}_{n,m}(t)|^2 dt + M \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} |q^{(k)}_{n,m}(t)|^p dt$$

$$= \varepsilon \|q^{(k)}\|^2_{L^2(-T/2,T/2;l_2^k)} + M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}$$

$$\le \varepsilon \|q\|^2_{T,k} + M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}.$$

Вибираючи $\varepsilon = \frac{\beta_0}{2}$, одержуємо наступне

$$\frac{\beta_0}{2}\|q^{(k)}\|^2_{T,k} \le M\|q^{(k)}\|^p_{L^p(-T/2,T/2;l_p^k)}.$$

Згідно (33), звідси слідує, що

$$\|q^{(k)}\|_{T,k} \to 0$$

при $k \to \infty$. Однак, це суперечить першій нерівності в (28). Тим самим властивість (32) доведена.

Замінюючи, якщо потрібно, $q^{(k)}_{n,m}$ на $(q^{(k)}_{n+aN,m+bN})$ з деякими $a, b \in \mathbb{Z}$, можемо вважати, що в (32) $0 \le n_k, m_k \le N-1$. Однак, таких значень n_k і m_k скінченне число. Тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі n_k і m_k співпадають, тобто $n_k = n_0$ і $m_k = m_0$. Тоді

$$\|q^{(k)}_{n_0,m_0}\|_{C(-T/2,T/2)} \ge \delta > 0. \tag{35}$$

Згідно нерівності (28) і компактності вкладення

$$H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right),$$

переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$ існує таке $q_{n,m} \in H^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, що $q^{(k)}_{n,m} \to q_{n,m}$ слабко в $H^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ і сильно в $C(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Покладемо $q = (q_{n,m})$. Переходячи до границі в (35), отримуємо

$$\|q_{n_0,m_0}\|_{C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \ge \delta_0 > 0,$$

тобто $q \ne 0$. Далі, для будь-якого натурального l і достатньо великого k :

$$\sum_{|n|,|m| \le l} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \le \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} = \|q^{(k)}\| \le C^2,$$

згідно (28). Переходячи до границі при $k \to \infty$ та враховуючи слабку напівнеперервність норми в H^1 знизу, отримуємо

$$\sum_{|n|,|m| \le l} \|q_n\|^2_{H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})} \le C^2.$$

Тепер перехід до границі при $m \to \infty$ показує, що $\|q\|_T \le C < \infty$ і $q \in X_T$.

Покажемо тепер, що q — критична точка функціоналу Φ. Для цього перевіримо, що

$$\langle \Phi'(q), h \rangle = 0 \tag{36}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Однак, множина таких функцій $h = \{h_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$, що $h_{n,m} = 0$ для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$, окрім скінченного числа, — всюди щільна в X_T. Тому рівність (36) достатньо перевірити тільки для таких функцій.

Нехай $h = (h_{n,m}) \in X_T$ така, що $h_{n,m} = 0$ при $|n|, |m| \ge l$. Для достатньо великого k коректно визначена така функція $h^{(k)} \in X_{T,k}$, що $h^{(k)}_{n,m} = h_{n,m}$ при $-[\frac{kN}{2}] \le n, m \le kN - [\frac{kN}{2}] - 1$. Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка Φ_k, то

$$0 = \langle \Phi'_k(q^{(k)}), h^{(k)} \rangle = \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} \dot q^{(k)}_{n,m}(t) \dot h^{(k)}_{n,m}(t) dt$$

$$+ \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1} \int_{-T/2}^{T/2} (a_{n-1,m} q^{(k)}_{n-1,m}(t) + a_{n,m} q^{(k)}_{n+1,m}(t) + b_{n,m-1} q^{(k)}_{n,m-1}(t) + b_{n,m} q^{(k)}_{n,m+1}(t)$$

$$+c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt - \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt.$$

Згідно означення $h^{(k)}$, при достатньо великому k сумування в правій частині останньої формули поширюється, фактично, на область $|n|, |m| \le l$, і ми отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\dot q^{(k)}_{n,m}(t)\dot h^{(k)}_{n,m}(t)dt + \sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}(a_{n-1,m}q^{(k)}_{n-1,m}(t) + a_{n,m}q^{(k)}_{n+1,m}(t)$$

$$+b_{n,m-1}q^{(k)}_{n,m-1}(t) + b_{n,m}q^{(k)}_{n,m+1}(t) + c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt$$

$$-\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt = 0.$$

Оскільки $q_n \to q$ слабко в $H^1(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ і сильно в $C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, то в останній рівності можна перейти до границі при $k\to\infty$. В результаті отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\dot q_{n,m}\dot h_{n,m}dt + (a_{n-1,m}q_{n-1,m}(t) + a_{n,m}q_{n+1,m}(t) + b_{n,m-1}q_{n,m-1}(t) + b_{n,m}q_{n,m+1}(t)$$

$$+c_{n,m}q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt - \sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2} V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt = 0.$$

При зробленому виборі h це і є рівність (36). Таким чином, існування ненульового розв'язку доведено.

Залишається перевірити, що q не може бути константою, якщо T — достатньо велике. Маємо

$$\Phi_k(q^{(k)}) = \Phi_k(q^{(k)}) - \frac{1}{2}\langle\Phi'_k(q^{(k)}), h^{(k)}\rangle$$

$$= \sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt.$$

Оскільки, згідно (iii), всі доданки в правій частині невід'ємні, то для довільного фіксованого l і достатньо великого k

$$\Phi_k(q^{(k)}) \ge \sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt.$$

Згідно зауваження 2.2, звідси слідує, що

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\}dt \le \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T$$

при достатньо малому η і

$$T \ge T_0 = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$$

(див. доведення теореми 2). Оскільки для будь-яких n і m маємо $q^{(k)}_{n,m} \to q_{n,m}$ в $C(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$, то, переходячи до границі, отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t) - V_{n,m}(q_{n,m}(t))\}dt \le \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T.$$

Тепер перейдемо до границі при $l\to\infty$. В результаті отримаємо

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int_{-T/2}^{T/2}\{\frac{1}{2}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t) - V_{n,m}(q_{n,m}(t))\}dt \le \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T.$$

Оскільки $\Phi'(q) = 0$, то ліва частина цієї нерівності рівна

$$\Phi(q) = \Phi(q) - \frac{1}{2}\langle\Phi'(q), q\rangle.$$

Таким чином,

$$\Phi(q) \le \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T. \tag{37}$$

Згідно леми 2.1, для будь-якого ненульового сталого розв'язку відповідне критичне значення не менше правої частини (37). Звідси, як і в доведенні теореми 2, робимо висновок, що розв'язок q не може бути сталим при $T \ge T_0$. Теорему доведено. □

Література

1. Бак С.М. *Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній гратці* // Математичні студії. — 2011. — Т.35, №1. — С. 60–65.
2. Бак С.М. *Існування та единість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній гратці* // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2011. — Вип.5. — С. 3–9.
3. Бак С.М., Баранова О.О., Білик Ю.П. *Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці* // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2010. — Вип.4. — С. 18–24.
4. Бак С.М. *Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів* // Математичні студії. — 2006. — Т.26, №2. — С. 140–153.
5. Бак С.Н., Панков А.А. *Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках* // Український математичний вісник. — 2010. — Т.7, №2. — С. 154–175.
6. Бак С.Н., Панков А.А. *О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов* // Доповіді НАН України. — 2004. — №9. — С. 13–16.
7. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К.: Наук. думка, 1965. — 799 с.
8. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

11. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*, Physica D, **103** (1997), 201–250.

12. Bak S.M. *Peridoc traveling waves in chains of oscillators*, Communications in Mathematical Analysis, **3**, 1 (2007), 19–26.

13. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*, Physics Repts, **306** (1998), 1–108.

14. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model, Springer, Berlin, 2004.

15. Feckan M., Rothos V. *Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions*, Nonlinearity, **20** (2007), 319–341.

16. Friesecke G., Matthies K. *Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice*, Discrete and continuous dynamical systems, **3**, 1 (2003), 105–114.

17. Pankov A., Zakharchenko N. *On some discrete variational problems*, Acta Appl. Math., **65** (2001), 295–303.

18. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, Providence, R. I.: American Math. Soc., 1986.

19. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices, Providence, R. I.: American Math. Soc., 2000.

20. Willem M. Minimax theorems, Boston, Birkhäuser, 1996.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського,
Вінниця, Україна
e-mail: *sergiy.bak@gmail.com*

Надійшло 01.03.2012

Bak S.M. *Existence of the time periodic solutions of system of oscillators on 2D–lattice*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 175–196.

It is considered the system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of oscillators on 2D–lattice. Results on existence of the time periodic solutions are obtained. By means of the mountain pass theorem, it is obtained sufficient conditions for the existence of such solutions.

Бак С.Н. *Существование периодических по времени решений системы осцилляторов на двумерной решетке* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 175–196.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы осцилляторов на двумерной решетке. Получено результат о существовании периодических по времени решений. С помощью теоремы о горном перевале получены достаточные условия существования таких решений.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 515.12+512.58

Bilyak Y.T., Komarnitskii M.Ya.

ON ELEMENTARITY OF RADICAL CLASSES OF MODULES OVER NONCOMMUTATIVE DEDEKIND DUO-DOMAINS

Bilyak Y.T., Komarnitskii M.Ya. *On elementarity of radical classes of modules over noncommutative dedekind duo-domains*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 197–203.

We find some sufficient conditions for a radical class of an idempotent radical in the category of modules over a Dedekind left bounded duo-domain to be axiomatisable. In the case of the integer numbers ring this result implies the Gorbachuk-Komarnitskii Theorem on axiomatizable radical classes of abelian groups.

Basic notions

We begin with recalling some basic facts and definitions. In this paper by A we denote an associative ring with the identity $1 \neq 0$, and assume that all modules are left unitary A-modules. The category of left A-modules we denote by $A - Mod$. Recall that a ring A is called a domain if it not contains left or right zero divisors ($a \neq 0$ is a left zero divisor if there exists $b \neq 0$ such that $ab = 0$). An ideal P of A is prime if, for all elements $a, b \in P$, $ab \in P$ implies that $a \in P$ or $b \in P$. A prime ring is a ring with the zero ideal to be a prime ideal. A ring A is called left hereditary if every left ideal is a projective module. A ring A is left Noetherian if every nonempty set of left ideals has a maximal element. Similarly we can define a right Noetherian and a right hereditary ring. A ring A is hereditary if it is right and left hereditary. Also a ring A is Noetherian if it is right and left Noetherian. Next recall that a ring Q is called a quotient ring if every regular element of Q is a unit. Given a quotient ring Q, a subring R, not necessarily containing 1, is called a left order in Q if each $q \in Q$ has the form $s^{-1}r$ for some $r, s \in R$.

Let Q be some fixed quotient ring and R_1, R_2 left orders of it. Then R_1 and R_2 are equivalent if there are units $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$ such that $a_1R_1b_1 \subseteq R_2$ and $a_2R_1b_2 \subseteq R_1$. If Q is a quotient ring and R is a left order in Q, then R is called a maximal left order if it is maximal within its equivalence class. A ring A is a noncommutative Dedekind domain if it is a hereditary Noetherian prime ring and is a maximal order. A left duo-ring is a ring with every left ideal to be two-sided. For noncommutative Dedekind duo-domain (see [9]) is true the following

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Key words and phrases: noncommutative Dedekind domain, duo-domain, radical, ultraproduct.

Theorem 1. *If A is a noncommutative Dedekind duo-domain and P is a proper ideal of A, then there exist $a_1, a_2 \in A$ such that*

$$P = a_1A + a_2A.$$

Recall that an ideal I of a ring A is called essential if, for any ideal J of A, it holds that $I \cap J \neq (0)$. Moreover, a ring A is called bounded if its every essential ideal contains a two-sided ideal. An A-module M is said to be divisible if $Mc = M$ for any nonzero $c \in A$.

Let $r : A - Mod \to A - Mod$ be a functor. We say that r is a preradical of $A - Mod$ if r assigns to each object M a subobject $r(M)$ in such way that every morphism $M \to N$ induces $r(M) \to r(N)$. A preradical r is called a radical if $r(M/r(M)) = 0$ for every object M. A preradical r is idempotent if $r(r(M)) = r(M)$.

In this paper all radicals are idempotent. With every preradical r we can associate two classes of objects from $A - Mod$, namely

$$T_r = \{M \in A - Mod \mid r(M) = M\}$$

and

$$F_r = \{M \in A - Mod \mid r(M) = 0\}.$$

If r is a radical, then T_r is called a radical class and its objects are radical objects, while F_r is a torsion-free class consisting of torsion-free objects. This classes have such properties:

Theorem 2. *The class T_r is closed under quotient objects, coproducts and extensions, while F_r is closed under subobjects, products and extensions.*

We need (see [1]) also the following

Theorem 3. *If A is a Dedekind domain and P is its prime ideal, then, for every radical r of $A - Mod$, the module A/P is either radical or radical-free.*

Recall also some notions of the model theory. We use a language $_AL$ which is appropriate to the left A-modules first order language. A set of all sentences of the language which are true class of modules Ψ is called a theory of a class of modules Ψ and denoted by $Th(\Psi)$. A set of models of a theory T is any class of modules which satisfies all sentences from T. A class is axiomatisable (or elementary) if there is a set of sentences T such that it is exactly the class of models of T. Two modules are elementarily equivalent if every sentence which is true in one of them is true in other. Next we give notions about ultrafilters and ultraproducts.

Let I be a set. Then D is called a filter over I if D is some nonempty collection of subsets from I satisfying:

(1) $\varnothing \notin D$;

(2) if $S, T \in D$, then $S \cap T \in D$;

(3) if $S \in D$ and $S \subseteq T \subseteq I$, then $T \in D$.

A filter D is said to be an ultrafilter if, for every $S \subseteq I$, it holds $S \in D$ or $I \setminus S \in D$. If $\{A_i \mid i \in I\}$ is a family of all sets indexed by I, then an ultraproduct of A_i with respect to D is the quotient of $\prod_{i\in I} A_i$ by an equivalence relationship

$$f \equiv_D g \text{ if and only if } \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$$

for any $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$. An ultraproduct of the A_i with respect to D is denoted by $\prod_{i\in I} A_i/D$. Now we can formulate the following test of axiomatisability

Theorem 4. *A class of modules is axiomatisable if and only if it is closed under ultraproducts and an elementarily equivalency of modules.*

1 EKLOF-FISHER THEOREMS

In this section we consider theorems from [6] that are proved for commutative Dedekind domains. In view of [1], this results can be used for noncommutative Dedekind duo-domains. First of all, we recall some designations from [6]. If M is left A-module, then M^α denote direct sum of α copies of a module M. If P is a prime ideal of a Dedekind domain A and M is a left A-module, then $M[P]$ will be the biggest submodule of M that has the annihilator P. Let us

$$U(P, n; M) = \begin{cases} dim(P^n M[P]/P^{n+1}M[P]) & \text{if this dimension is finite,} \\ \infty & \text{in else case.} \end{cases}$$

$$Tf(P; M) = \begin{cases} lim_{n\to\infty} dim(P^n M[P]/P^{n+1}M[P]) & \text{if it is finite,} \\ \infty & \text{in else case.} \end{cases}$$

$$D(P; M) = \begin{cases} lim_{n\to\infty} dim(P^n M[P]) & \text{if it is finite,} \\ \infty & \text{in else case.} \end{cases}$$

It is necessary to say that we consider dimension over A/P. Let

$$U^*(P, n; M) = \begin{cases} 0 & \text{if } U(P, n; M) = 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ \infty & \text{if } U(P, n; M) \neq 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ U(P, n; M) & \text{if } A/P \text{ is finite.} \end{cases}$$

$$Tf^*(P; M) = \begin{cases} 0 & \text{if } Tf(P; M) = 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ \infty & \text{if } Tf(P; M) \neq 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ Tf(P, n; M) & \text{if } A/P \text{ is finite.} \end{cases}$$

$$D^*(P; M) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(P; M) = 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ \infty & \text{if } D(P; M) \neq 0 \text{ and } A/P \text{ is infinite,} \\ D(P; M) & \text{if } A/P \text{ is finite.} \end{cases}$$

We say that a module M has a bounded order if there exists $0 \neq \lambda \in A$ such that $\lambda M = 0$. Ω will denote the set of all nonzero prime ideals of a ring A. If $P \in \Omega$, then M_P will be a localization of a module M over P.

Theorem 5. *Let A be Dedekind domain and M be a left A-module. Then M is elementarily equivalent to a module $\oplus_{P\in\Omega}M_P \oplus M_d$, where*

$$M_P = \oplus_n (A/P^n)^{(\alpha_{P,n})} \oplus A_P^{(\beta_P)} \text{ and } M_d = \oplus_{P\in\Omega}(A/P)^{\gamma_P} \oplus K^{(\delta)}.$$

Here K is a field of fractions of a domain and

$$\alpha_{P,n} = \alpha_{P,n}(M) = \begin{cases} U^*(P, n-1; M) & \text{if it is finite,} \\ \geqslant k = CardA + \aleph_0 & \text{in other case.} \end{cases}$$

$$\beta_P = \beta_P(M) = \begin{cases} Tf^*(P; M) & \text{if it is finite,} \\ \geqslant k & \text{in other case.} \end{cases}$$

$$\gamma_P = \gamma_P(M) = \begin{cases} D^*(P; M) & \text{if it is finite,} \\ \geqslant k & \text{in other case.} \end{cases}$$

$$\delta = \delta(M) = \begin{cases} 0 & \text{if } M \text{ have bounded order,} \\ \geqslant k & \text{in other case.} \end{cases}$$

According to the fact that a direct sum and a direct product are elementarily equivalent this theorem can be formulated as follows

Theorem 6. *Let A be a Dedekind domain. Then every left A-module M is elementarily equivalent to a module*

$$(\oplus_n (A/P^n)^{(\alpha_{P,n})}) \oplus A_P^{(\beta_P)} \oplus (\oplus_{P\in\Omega}(A/P)^{\gamma_P}) \oplus K^{(\delta)},$$

where $\alpha_{P,n}, \beta_P, \gamma_P, \delta$ are the same as in the previous theorem.

Theorem 7. *Modules M and N over a Dedekind domain are elementarily equivalent if and only if*

$$U^*(P, n; M) = U^*(P, n; N),\ Tf^*(P; M) = Tf^*(P; N),\ D^*(P; M) = D^*(P; N),$$

where modules M and N have a bounded or unbounded order in the same time.

2 LEMMAS

Lemma 2.1. *Let A be a noncommutative Dedekind duo-domain and let r be a nontrivial radical for which the radical class T_r is axiomatisable. If the class T_r contains a module A/P, where P is some nonzero prime ideal of A, then it also contains such modules:*

1) *the localization A_P of A at a prime ideal P;*

2) *the field of fractions ${}_AK$ of a ring A that is considered as a left A-module;*

3) $\widehat{A/P'}$, *where P' is an arbitrary nonzero ideal of a ring A.*

Proof. The class T_r is closed under extensions, therefore $A/P^n \in T_r$ for arbitrary $n \in \mathbb{N}$.

Let D be a countably-incomplet ultrafilter over the set of natural numbers $\mathbb{N}$. Then, according to the fact that T_r is axiomatisable, we obtain that

$$M = (\prod A/P^n)/D$$

belong to T_r. A module M has an unbounded order, and so

$$\delta(M) \geq CardA + \aleph_0.$$

By the Eklof-Fisher Theorem (see Theorem 2) the class T_r contains a module for which module ${}_AK$ is a direct summand. Thus K is contained in T_r as an epimorphic image. Similarly, $K/A \in T_r$. But $K/A \cong \bigoplus_{P\in\Pi} A/P$, hence $A/P \in T_r$ for every $P \in \Omega$.

Consider the case when A/P is a finite module. Then

$$\beta_P = dim_{A/P} M/(t(M) + PM),$$

where $t(M)$ is the periodic part of a module M. Now we show that $\beta_P(M) \neq 0$. For this, we have to check that $t(M) + PM \neq M$. Let us denote by 1_n the coset in A/P^n with representative 1. We have to prove that the element $(1_1, 1_2, ...1_n, ...)$ of a module M do not belongs to the submodule $t(M) + PM$. By Theorem 2.1, $P = p_1A + p_2A$, where $p_1, p_2 \in A$. Thus $x = t + p_1a_1 + p_2a_2$, where $t \in t(M)$, $a_1, a_2 \in M$. Since the annihilator of an element t is power of an ideal P, for some $k \in \mathbb{N}$ we obtain that $P^k t = 0$. Consequently,

$$P^k x \subseteq P^{k+1}a_1 + P^{k+1}a_2.$$

Let

$$a_1 = \overline{(a_1', ...a_n', ...)},\ a_2 = \overline{(a_1'', ...a_n'', ...)},$$

where $a_i', a_i'' \in A$ for $i \in \mathbb{N}$. Therefore from previous inclusion for some set of indexes $U \in D$ is true that

$$P^k \subseteq P^{k+1}a_i' + P^{k+1}a_i'' + P^i \subseteq P^i.$$

Hence from $P^i \subseteq P^k$ we obtain that $P^i = P^k$, $i \geq k+1$. But in a Dedekind ring a decomposition into a product of prime ideals is unique, so we obtain contradiction. Thus $\beta_P(M) \neq 0$. Then, from Theorem 2, T_r contains a module with A_P as a direct summand and, using previous thoughts, A_P lies in T_r.

Next if A/P is an infinite module, then, according to definition of $T^*f(P, M)$, the equality $\beta_P = 0$ is true only if

$$lim_{n\to\infty} dim P^n M/P^n + 1M = 0$$

for all k, and therefore $P^k M/P^{k+1}M = 0$. From the last equality we obtain

$$P^k = P^{k+1}P^k M = P^k M$$

for some k. This equation is false for a module M and arbitrary $k \in \mathbb{N}$. Verifying of this fact is similar to those we have done early in this proof. Therefore $A/P \in T_r$. $\square$

Let Π be some set of prime ideals in a ring A. A module M is Π–divisible if $IM = M$ for every ideal I from Π. For every Π, a class of all Π-divisible modules is a radical class for some radical of the category $A - Mod$. This radical we will denote by r_Π.

Lemma 2.2. *A module M is Π-divisible if and only if it is elementarily equivalent to the module of the form*

$$\oplus_{(P\in\Omega\setminus\Pi, n\in N)}((A/P^n)^{\alpha_{P,n}}) \oplus (\oplus_{P\in\Omega} A_P^{\beta_P}) \oplus (\oplus_{P\in\Omega} (\widehat{A/P})^{(\gamma_P)}) \oplus K^{(\delta)}, \tag{1}$$

where $\alpha_{P,n}, \beta_P, \delta, \gamma_P$ are some cardinal numbers.

Proof. We consider a set of sentences of the language ${}_AL$

$$\mathcal{C} = \{(\forall x)(\exists y_1)(\exists y_2)(x = p_1 y_1 + p_2 y_2) p_1 A + p_2 A = P \in \Pi\}.$$

It is obvious that M is Π-divisible if and only if M is a model of a system of formulas C. Therefore the class of Π-divisible modules is axiomatisable and, consequently, this class is elementarily closed. Since A/P^n, A_P, A/P are Π-divisible for $P \in \Pi$ and K is Ω-divisible, using the fact that class of Π-divisible groups is closed under direct sums we obtain that modules of the form 1 are Π-divisible. If $\alpha_{P,n} \neq 0$ or $\beta_P \neq 0$ for some $P \in \Pi$, then a module is not Π-divisible. Hence all modules which are elementarily equivalent to it are not Π-divisible too. □

3 MAIN RESULT

Theorem 8. *The radical class of a nontrivial radical r in the category of left modules over a noncommutative Dedekind duo-ring A is axiomatisable if and only if $r = r_\Pi$ for some nonempty subset Π of the set of nonzero prime ideals in a ring A.*

Proof. It is well known that for every prime ideal $P \in \Omega$ the module A/P is r-radical or r-radical-free. So we have in Ω two subsets:

$$\Pi = \{P \in \Omega \mid A/P \notin F_r \Leftrightarrow A/P \in T_r\}$$

and

$$\Omega \setminus \Pi = \{P \in \Omega \mid A/P \in T_r\}.$$

We have to show that if the class T_r is axiomatisable, then it contains all Π-divisible modules. It is obvious that A/P' is Π-divisible for some $P' \in \Omega$ if and only if $P' \in \Omega \setminus \Pi$. Thus every Π-divisible module of the form A/P belongs to T_r. In view Lemma 1, the class T_r contains all modules of the form: A_P, A/Q, $P \in \Omega \setminus \Pi$, $Q \in \Omega$ and a module K. The class T_r is closed under extensions, and so therefore A/P^n, for $P \in \Omega \setminus \Pi$, $n \in \mathbb{N}$, belongs to the class T_r. Hence the class T_r contains every module of the form 1. The class T_r is axiomatisable, and so it contains all modules that are elementarily equivalent to the module of such form. Therefore T_r contains all Π-divisible modules. Let M be any module from the class T_r. We have to prove that M is Π-divisible. If we suppose that this is not true, then, by the Eklof-Fisher Theorem and Lemma 1, there exists $P \in \Pi$ such that one of the invariants $\alpha_{(P,1)}(M)$, $\beta_P(M)$ of some module M from the class T_r is nonzero. As a consequence, A/P or A_P belongs to the class T_r, where $P \in \Pi$. Since $A_P/PA_P \cong A/P$, we deduce that $A/P \in T_r$, a contradiction with the definition of the set Π. Thus $r = r_\Pi$. □

REFERENCES

1. Горбачук Е.Л., Комарницкий Н.Я. *Об аксиоматизируемости радикальных и полупростых классов модулей и абелевых груп* // Укр. мат. журн. — 1982. — Т.34, №2. — С. 512–533.
2. Комарницкий Н.Я. *Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связанных с кручениями* // Мат. исслед. — 1980. — Вып.48. — С. 92–109.
3. Мальцев А.П. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1976. — 624 с.
4. Eisenbud D., Robson J.C. *Hereditary Noetherian Prime Rings*, Journal of Algebra, **16** (1970), 86–104.
5. Eklof P.C. *The Structure of Ultraproducts of Abelian Groups*, Pacific Journal of Mathematics, **47**, 1 (1973), 67–79.
6. Eklof P.C., Fisher E.R. *The Elementary Theory of Abelian Groups*, J. Symbolic Logic, **39**, 3 (1974), 603–604.
7. Marubayashi H. *Modules over bounded dedekind prime rings*, Osaka J. Math., **9** (1972), 95–110.
8. Prest M. Model theory and modules (London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 130), Cambrige Univ. Press., Cambrige, 1988.
9. Stenstrom B. Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

Lviv Ivan Franko National University,
Lviv, Ukraine
e-mail: *jbilyak@ukr.net*

Received 23.09.2012

Біляк Ю.Т., Комарницький М.Я. *Аксіоматизовність радикальних класів модулів над некомутативними дедекіндовими дуо-областями* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 197–203.

Знайдено деякі достатні умови аксіоматизовності радикального класу ідемпотентного радикалу в категорії модулів над дедекіндовою лівою дуо-областю. У випадку кільця цілих чисел цей результат має наслідком теорему Горбачука-Комарницького про аксіоматизовність радикальних класів абелевих груп.

Биляк Ю.Т., Комарницкий Н.Я. *Аксиоматизируемость радикальных классов модулей над некоммутативными дедекиндовыми дуо-областями* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 197–203.

Найдены некоторые достаточные условия аксиоматизируемости радикального класса идемпотентного радикала в категории модулей над дедекиндовой левой дуо-областью. В случае кольца целых чисел этот результат имеет следствием теорему Горбачука-Комарницкого о аксиоматизовности радикальных классов абелевых групп.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2 | Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.550.4+517.552

Бродяк О.Я., Васильків Я.В.

ЗОБРАЖЕННЯ ЛОГАРИФМА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Бродяк О.Я., Васильків Я.В. *Зображення логарифма цілої функції багатьох комплексних змінних* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 204–211.

Отримано інтегральне зображення певної гілки логарифма цілої в $\mathbb{C}^n$ функції, яке узагальнює формулу Пуассона-Іенсена-Штоля.

1 Вступ

Оператори зовнішнього диференціювання ∂ і $\overline{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ визначають співвідношеннями (див., напр., [6, Глава 1])

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial w_k}\, d\, w_k, \qquad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\, d\, \overline{w}_k,$$

де $w_k = x_k + i\, y_k,\ \overline{w}_k = x_k - i\, y_k,\ \{x_k, y_k\} \subset \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n$, а

$$\frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

— оператори формальних похідних. Покладемо

$$d := \partial + \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\, d\, x_k + \frac{\partial}{\partial y_k}\, d\, y_k\right), \quad d^{\perp} := i(\partial - \overline{\partial}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\, d\, x_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\, d\, y_k\right).$$

Нехай

$$\omega^{n-1}(\eta) = \left(\frac{1}{4} d^{\perp} d\, \log |\eta|^2\right)^{n-1}, \qquad \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31B10, 32A15.
Ключові слова і фрази: ціла функція багатьох комплексних змінних, інтегральне зображення.
Робота виконана в рамках науково-дослідних тем "Нові методи комплесного і функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(номер держреєстрації 0112U001272) та "Дослідження властивостей δ-субгармонійних та мероморфних функцій, ряди Фур'є"(номер держреєстрації 0111U002152).

— однорідна метрична форма Фубіні-Штуді,

$$\sigma(\eta) = -\frac{1}{2\pi^n}\, d^{\perp} \log |\eta| \wedge \omega^{n-1}(\eta)$$

— метрична форма Пуанкаре (тобто нормована форма об'єму на сферах $\mathbf{S}^n(r) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| = r\},\ 0 < r < +\infty$).

Нехай $f(w)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функція, $f(0) = 1$, $\mathcal{Z}_f = f^{-1}(\{0\}) = \{w \in \mathbb{C}^n : f(w) = 0\}$ — її нульова поверхня, а ν_f — функція кратності нульової поверхні $\mathcal{Z}_f$ (тобто пара $(\mathcal{Z}_f, \nu_f)$ — дивізор функції f).

Покладемо $\langle w, \eta\rangle = w_1\overline{\eta}_1 + \cdots + w_n\overline{\eta}_n$, $\{w, \eta\} \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbf{B}^n(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| < t\}$, $\overline{\mathbf{B}}^n(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| \le t\}$, $\overline{\mathbf{B}}^n_*(t) = \overline{\mathbf{B}}^n(t) \cap \mathbb{C}^n_*$, $\mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\zeta \in \mathcal{Z}_f} \zeta(a)$, де $\zeta(a) = a\,\zeta$, $a \in [1, +\infty)$, $0 < t < +\infty$.

В роботі [11] доведено один багатовимірний аналог формули Пуассона-Іенсена. Наведемо його формулювання лише для випадку голоморфної в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функції.

Для $y \in \mathbb{C}$, $|y| < 1$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо (див. [11, с. 165] або [10, с. 403])

$$L(y) := L_n(y) := \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\, y^{n-1}}\left[w^{n-1}\,\mathrm{Log}\,(1-y)\right],$$

де символ Log означає головне значення логарифма.

Теорема 1. *Нехай $f \not\equiv 0$ — голоморфна у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$ функція. Припустимо, що $\overline{\mathbf{B}}^n(r) \subseteq G$ і $\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}^n(s) = \varnothing$ при деякому $0 < s < r < +\infty$. Припустимо також, що $f(0) = 1$. В кулі $\mathbf{B}^n(s)$ визначимо функцію $\log f(w)$ умовою $\log f(0) = 0$. Якщо $w \in \mathbf{B}^n(s)$, то*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log |f(\eta)| \left[\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle w, \eta\rangle)^n} - 1\right] \sigma(\eta)$$
$$+ \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w, \eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w, \eta\rangle}{r^2}\right)\right) \omega^{n-1}(\eta). \tag{1}$$

Зауваження 1.1. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх $w \in \mathbf{B}^n(s)$*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log |f(\eta)| \left(\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle w, \eta\rangle)^n} - 1\right) \sigma(\eta)$$
$$+ \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(t)} \nu_f(\eta) \left(1 - \frac{t^n\,|\eta|^n}{(t|\eta| - \langle w, \eta\rangle)^n}\right) \omega^{n-1}(\eta)$$
$$+ \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(t)} \nu_f(\eta) \left(1 - \frac{r^{2n}|\eta|^n}{(r^2|\eta| - t\langle w, \eta\rangle)^n}\right) \omega^{n-1}(\eta), \tag{2}$$

де перший і третій інтеграли є голоморфними в $\mathbf{B}^n(r)$ функціями, а другий — голоморфною в $\mathbf{B}^n(s)$ функцією.

Покажемо, що зображення (1), після відповідних перетворень, набуде вигляду (2). Справді, спочатку подамо співвідношення (1) у наступному вигляді

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log|f(\eta)| \left(\frac{r^{2n}}{(r^2-\langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\sigma(\eta)$$
$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left[L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right)\right]\omega^{n-1}(\eta)$$
$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left[L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r^2}\right)\right]\omega^{n-1}(\eta).$$

Тоді (див. [10, с. 405]), враховуючи, що для $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$

$$L(z) = -\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\frac{z^p}{p} \quad \text{та} \quad \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} C^p_{p+n-1} z^p, \tag{3}$$

і той факт, що $\nu_f(\eta)=0$ для $\eta\in\mathbf{B}^n(s)$, маємо

$$\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right)\right)\omega^{n-1}(\eta)$$
$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\int_{|\eta|}^{r}\frac{dt}{t^{p+1}}$$
$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^r\left[\int_{|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{dt}{t^{p+1}}$$
$$= \frac{1}{\pi^{n-1}}\int_s^r\left[\int_{s\le|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(1-\left(\frac{t|\eta|}{t|\eta|-\langle w,\eta\rangle}\right)^n\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{dt}{t},$$

і, відповідно,

$$\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r^2}\right)\right)\omega^{n-1}(\eta)$$
$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{r^2\,|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\int_{|\eta|}^{r} t^{p-1}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^r\left[\int_{|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{r^2\,|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]t^{p-1}\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi^{n-1}}\int_s^r\left[\int_{s\le|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(1-\left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta|-t\langle w,\eta\rangle}\right)^n\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{dt}{t}.$$

Враховуючи сказане вище, одержуємо (2).

При доведенні теореми 1 істотно використано наступні два оператори:
1^0. інтегральний оператор

$$\delta^n[g](\zeta) := (n-1)\int_0^1 (1-t)^{n-2} g(t\zeta)\,dt,$$

2^0. диференціальний оператор

$$\delta_n[g](\zeta) := \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\,z^{n-1}}\left[z^{n-1}g(z\zeta)\right]\Big|_{z=1},$$

а також їх властивості (див. [11]–[9]), сформульовані у наступному твердженні.

Твердження 1.1. *Нехай g голоморфна в $\mathbf{B}^n(r)\subset\mathbb{C}^n$ $(n\ge 2)$ функція, $\zeta\in\mathbf{B}^n(r)$, $0<r<+\infty$. Тоді*

a) $\delta^n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}^n(r)$;

b) $\delta^n[g](\zeta) = \int\limits_{\mathbf{S}^n(1)} g(\langle\zeta,\eta\rangle\eta)\,\sigma(\eta)$;

c) *якщо* $g(0)=0$, *то* $\delta_n[g](0)=0$;

d) $\delta_n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}^n(r)$;

e) $\delta_n\circ\delta^n[g] = \delta^n\circ\delta_n[g] = g$.

Формулу Пуассона-Iенсена-Штоля (1) в роботі [1] узагальнено на випадок плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій.

2 Зображення логарифма цілої в $\mathbb{C}^n$ функції

Мета цієї роботи узагальнити теорему 1 на випадок логарифмів цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій. З цією метою подамо наступне означення.

Означення 2.1. *Для цілої в $\mathbb{C}^n$ функції $f(w)$, $f(w)\ne 0$ для всіх w із $\mathbf{B}^n(s)$ при деякому $0<s<+\infty$, $f(0)=1$, покладемо*

$$\log f(w) := \int_0^{|w|}\frac{f'_x(xw/|w|)}{f(xw/|w|)}\,dx, \quad w\in\mathbb{C}^n_*, \quad \log f(0)=0.$$

Правильна наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $f(w)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $f(w)\ne 0$ в $\mathbf{B}^n(s)$ при деякому $0<s<R<+\infty$, $f(0)=1$, $|w|=r$. Тоді для всіх $w\in\mathbf{B}^n_*(R)$*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)|\left(\frac{R^{2n}}{(R^2-\langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\sigma(\eta)$$
$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)}\nu_f(\eta)\,\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r\left(1-\frac{r^n\,|\eta|^{2n}}{(r|\eta|^2-t\langle w,\eta\rangle)^n}\right)\frac{dt}{t}$$
$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)}\nu_f(\eta)\,\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r\left(\frac{R^{2n}r^n}{(R^2r-t\langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\frac{dt}{t}. \tag{4}$$

Доведення. В ідейному плані доведення цієї теореми є модифікацією доведення теореми 1 з [1] (порівн. з [11, Теорема 1.7]). Нехай $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, $f_\zeta(z) = f(z\zeta)$ — зріз-функція f. З огляду на узагальнену формулу Шварца (див. теореми 1 та 2 з [8] при $u = \log|f_\zeta|$) та формулу Ієнсена [7], маємо

$$\log f_\zeta(z) - \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_\zeta(Re^{i\theta})| \,\frac{z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta$$

$$+ \sum_{|z|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) - \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \log\left(1 - \frac{z\,\overline{a}_j}{R^2}\right), \tag{5}$$

де $a_j \in \mathcal{Z}_{f_\zeta}$, $z \in \mathbf{B}^1_*(R)$.

Покладемо

$$F(z\zeta) := \log f_\zeta(z) - \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right).$$

Зауважимо, що правий бік співвідношення (5) є голоморфною в $\mathbf{B}^1(R)$ функцією від змінної z для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, а лівий — голоморфною функцією від змінної $z \in \mathbf{B}^1(R)$ для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$ таких, що $z\zeta \in \mathbf{B}^n_*(R)$. Тоді, з теореми про усунення відрізка [2, Теорема 4.15] випливає, що зріз-функція $F(z\zeta)$ також є голоморфною в $\mathbf{B}^1(R)$ функцією від змінної z для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, тобто для всіх $z\zeta \in \mathbf{B}^n(R)$.

Зважаючи на те, що

$$\log\left(1 - \frac{z}{a}\right) = -\int\limits_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}}{|z|\,|a|^2 - t\,z\,\overline{a}}\,\frac{dt}{t}, \qquad \log\left(1 - \frac{z\,\overline{a}}{R^2}\right) = -\int\limits_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}}{R^2\,|z| - t\,z\,\overline{a}}\,\frac{dt}{t},$$

подамо співвідношення (5) у наступному вигляді

$$\log f_\zeta(z) + \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{|z|\,|a_j|^2 - tz\overline{a}_j}\,\frac{dt}{t} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_\zeta(Re^{i\theta})|\,\frac{z\,Re^{-i\theta}}{R^2 - z\,Re^{-i\theta}}\,d\theta$$

$$- \sum_{|z|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{|z|\,|a_j|^2 - tz\overline{a}_j}\,\frac{dt}{t} + \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{R^2\,|z| - t\,z\,\overline{a}_j}\,\frac{dt}{t}. \tag{6}$$

Візьмемо $w \in \mathbf{B}^n(R)$ і $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$. Замінимо в (6) z на $\langle w, \zeta\rangle$ і зауважимо, що $|\langle w, \zeta\rangle| < R$. Тоді

$$F(\langle w, \zeta\rangle\,\zeta) := \log f(\langle w, \zeta\rangle\,\zeta) + \sum_{|a_j|\le|\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_j\,\zeta|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta}\zeta)|\,\frac{\langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2 - \langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}\,\frac{d\theta}{\pi} - \sum_{|\langle w,\zeta\rangle|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j)$$

$$\times \int\limits_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_j\,\zeta|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t} - \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int\limits_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w, \zeta\rangle| - t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}. \tag{7}$$

Тепер усереднимо всі складові співвідношення (7) за параметром $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$. Враховуючи п. b) твердження 1.1, маємо

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} F(\langle w, \zeta\rangle\,\zeta)\sigma(\zeta) = \delta^n[F](w). \tag{8}$$

Крім того, позаяк метрична форма Пуанкаре $\sigma(\bullet)$ інваріантна відносно обертань [3, Твердження 1.4.7], то

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \frac{\sigma(\zeta)}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \log|f(Re^{i\theta}\zeta)|\,\frac{\langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2 - \langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}\,d\theta = \int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)|\,\frac{\langle w, \eta\rangle}{R^2 - \langle w, \eta\rangle}\sigma(\eta). \tag{9}$$

Інтегрування по $\mathbf{S}^n(1)$ можна здійснити спочатку по перетину $\mathbf{S}^n(1)$ з комплексною прямою $l_\zeta := \{\xi = \lambda\zeta\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, тобто по колу $\{|\lambda| = 1\}$, а потім по сукупності $\{l_\zeta\}$ таких прямих (див., напр., [4, Глава 3], [5, с. 254-255]). Оскільки на комплексній прямій l_ζ форма $-\dfrac{1}{2\,\pi}\,d^\perp \log|\xi| = \dfrac{d\,\theta}{2\,\pi}$, де $\theta = \arg\lambda$, то враховуючи, що $\sigma(\xi) = -\dfrac{1}{2\,\pi^n}\,d^\perp \log|\xi| \wedge \omega^{n-1}(\xi)$ і ті факти, що метрична форма $\omega^{n-1}(\bullet)$ інваріантна відносно розтягів та обертань, одержимо

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|a_j|\le|\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_j|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|a_je^{i\theta}|\le|\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_je^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{\langle t\,w,\, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_je^{i\theta}|^2 - t\langle w, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f\cap\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\,\langle w, \eta\rangle}{r|\eta|^2 - t\langle w, \eta\rangle}\,\frac{dt}{t}, \tag{10}$$

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|\langle w,\zeta\rangle|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_j|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|\langle w,\zeta\rangle|<|a_je^{i\theta}|<R} \nu_{f_\zeta}(a_je^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{\langle t\,w,\, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}{|\langle w, \zeta\rangle|\,|a_je^{i\theta}|^2 - t\langle w, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f\cap\{\mathbf{B}^n(R)\setminus\overline{\mathbf{B}}^n(r)\}} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\,\langle w, \eta\rangle}{r|\eta|^2 - t\langle w, \eta\rangle}\,\frac{dt}{t}, \tag{11}$$

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w, \zeta\rangle| - t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|a_je^{i\theta}|<R} \nu_{f_\zeta}(a_je^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w, \zeta\rangle| - t\,\langle w, a_je^{i\theta}\zeta\rangle}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\langle w, \eta\rangle}{R^2 r - t\langle w, \eta\rangle}\,\frac{dt}{t}. \tag{12}$$

Отже, з урахуванням співвідношень (8), (9), (11) та (12), маємо

$$\delta^n[F](w) = \int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)| \frac{\langle w,\eta\rangle}{R^2 - \langle w,\eta\rangle}\sigma(\eta)$$

$$-\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\{\mathbf{B}^n(R)\setminus\overline{\mathbf{B}}^n(r)\}} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r \frac{t\,\langle w,\eta\rangle}{r|\eta|^2 - t\langle w,\eta\rangle}\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r \frac{t\langle w,\eta\rangle}{R^2 r - t\langle w,\eta\rangle}\frac{dt}{t}. \tag{13}$$

Застосовуючи тепер оператор δ_n до співвідношення (13) і враховуючи, що

$$\delta_n\circ\delta^n[F] = F, \qquad \delta_n\left[\frac{\langle w,\bullet\rangle}{R^2 - \langle w,\bullet\rangle}\right] = \frac{R^{2n}}{(R^2 - \langle w,\bullet\rangle)^n} - 1,$$

$$\delta_n\left[\frac{t\,\langle w,\bullet\rangle}{r|\bullet|^2 - t\,\langle w,\bullet\rangle}\right] = \frac{r^n|\bullet|^{2n}}{(r|\bullet|^2 - t\langle w,\bullet\rangle)^n} - 1, \quad \delta_n\left[\frac{t\langle w,\bullet\rangle}{R^2 r - t\langle w,\bullet\rangle}\right] = \frac{R^{2n}r^n}{(R^2 r - t\langle w,\bullet\rangle)^n} - 1,$$

і співвідношення (7) та (10), отримуємо (4) для всіх $w\in\mathbf{B}^n_*(R)$. □

3 Завершальне зауваження

Зауваження 3.1. *Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай $w\in\mathbf{B}^n(s)$. Тоді, враховуючи співвідношення (3), співвідношення (4) набуде вигляду*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)| \left[\frac{R^{2n}}{(R^2 - \langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right]\sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{R^2}\right)\right)\omega^{n-1}(\eta),$$

тобто отримуємо твердження теореми 1.

Література

1. Бродяк О.Я., Васильків Я.В., Тарасюк С.І. *$H(p,q)$-розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій* // Вісн. Харківського національного у-ту. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". — 2010. — №931. — С. 73–92.
2. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. — Львів: Афіша, 2008. — 203 с.
3. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
4. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. — М.: Наука, 1985. — 272 с.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Ч. 2. — М.: Наука, 1985. — 464 с.
6. Шабат Б.В. Распределение значений голоморфных отображений. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
7. Jensen J.L. W.V. *Sur un nouvel et important theoreme de la theorie des fonctions*, Acta Math., **22**, (1899), 359–364.
8. Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya. V. *Congjugate of subharmonic function*, Math. Stud., **13**, 13 (2010), 173-180.

9. Kujala R.O. *Functions of finite λ-type in several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **161**, (1971), 327–358.
10. Stoll W. *About entire and meromorphic functions of exponential type*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., **11**, (1968), 392–430.
11. Stoll W. *Normal familes of non-negative divisors*, Math. Z., **84**, (1964), 154–218.

Національний університет "Львівська політехніка",

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

e-mail: *brodyakoksana@mail.ru, yavvasylkiv@gmail.com*

Надійшло 20.02.2012

Brodyak O.Ya., $\boxed{\text{Vasyl'kiv Ya.V.}}$ *Representation of logarithm of entire function in several complex variables*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 204–211.

The integral representation of some branch of an entire on $\mathbb{C}^n$ function which generalized the Poisson-Jensen-Stoll Formula is obtained.

Бродяк О.Я., $\boxed{\text{Васильків Я.В.}}$ *Представление логарифма целой функции многих комплексных переменных* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 204–211.

Получено интегральное представление определенной ветви логарифма целой в $\mathbb{C}^n$ функции, обобщающее формулу Пуассона-Иенсена-Штоля.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Василишин Т.В.

ОПИС СПЕКТРУ ТА ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ В АЛГЕБРАХ ТИПУ ВІНЕРА ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ (p,q)-ПОЛІНОМАМИ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Василишин Т.В. *Опис спектру та диференціювань в алгебрах типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 212–228.

В роботі описано спектри алгебр типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банахових просторах, а також введено і досліджено диференціювання на цих алгебрах.

1 Вступ

У роботах [2], [3], [5], [6] досліджувались алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, зокрема у [3] було вивчено деякі важливі властивості таких алгебр, у [6] було описано спектр алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі. Ми досліджуємо алгебру $\mathcal{W}(X)$ функцій, які можна подати у вигляді абсолютно збіжного на обмежених підмножинах банахового простору ряду (p,q)-поліномів. На цій алгебрі існує природна структура алгебри Фреше. Також для алгебри $\mathcal{W}(X)$ вдається узагальнити деякі ідеї та методи дослідження алгебр аналітичних функцій обмеженого типу.

В даній роботі описано спектр алгебри $\mathcal{W}(X)$, а також введено і досліджено диференціювання, пов'язані зі спектром.

2 Основні означення

Нехай X — комплексний банахів простір. Нехай $p,q \in \mathbb{Z}_+$, де через $\mathbb{Z}_+$ позначено множину цілих невід'ємних чисел. Функцію $A: X^{p+q} \to \mathbb{C}$, яка є лінійною по кожному з перших p аргументів, антилінійною по кожному з останніх q аргументів, симетричною

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46J20, 46E15.
Ключові слова і фрази: (p,q)-поліномами на банахових просторах, алгебри типу Вінера, спектр, диференціювання.

по перших p аргументах і симетричною по останніх q аргументах будемо називати (p,q)-лінійною симетричною формою. Простір неперервних (p,q)-лінійних симетричних форм із нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|\le 1,\ldots,\|x_{p+q}\|\le 1} |A(x_1,\ldots,x_{p+q})|$$

позначимо $\mathcal{L}^s(^{p,q}X)$.

Звуження (p,q)-лінійної симетричної форми на діагональ назвемо (p,q)-поліномом. Число p назвемо степенем однорідності P і позначимо $\deg_h P$, число q — степенем антиоднорідності P і позначимо $\deg_a P$. Простір неперервних (p,q)-поліномів із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\le 1} |P(x)|$$

позначимо $\mathcal{P}(^{p,q}X)$.

Для (p,q)-полінома P назвемо (p,q)-лінійну симетричну форму A_P, звуженням якої є P, формою, асоційованою з P. У [4] побудовано так звану поляризаційну формулу, яка дозволяє за даним (p,q)-поліномом відновити асоційовану з ним форму:

$$A_P(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{(2q+1)2^{p+q}p!q!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p+q} \sum_{j=1}^{2q+1} \alpha_j^{2q+1-p} \times P\Big(\alpha_j(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_p x_p)+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q}\Big), \quad (1)$$

де $\alpha_j = \exp\left(\frac{2\pi(j-1)i}{2q+1}\right)$.

За допомогою поляризаційної формули в [4] одержано оцінку для норм (p,q)-полінома і асоційованої з ним (p,q)-лінійної симетричної форми, яку називають поляризаційною нерівністю:

$$\|P\| \le \|A_P\| \le c(p,q,X)\|P\|, \quad (2)$$

де $c(p,q,X)$ — поляризаційна константа, для якої справедлива подвійна оцінка $1 \le c(p,q,X) \le \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}$. Зауважимо, що $\frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!} = \frac{(p+q)^{p+q}}{(p+q)!}\cdot\frac{(p+q)!}{p!q!}$. Оскільки $\frac{(p+q)^{p+q}}{(p+q)!} \le e^{p+q}$ і $\frac{(p+q)!}{p!q!} = C_{p+q}^p \le 2^{p+q}$, то $\frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!} \le (2e)^{p+q}$. Звідси одержимо оцінку

$$\|P\| \le \|A_P\| \le (2e)^{p+q}\|P\|. \quad (3)$$

Із означення норми (p,q)-лінійної симетричної форми і оцінки (3) отримуємо оцінку

$$|A_P(x_1,\ldots,x_{p+q})| \le \|A_P\|\|x_1\|\ldots\|x_{p+q}\|. \quad (4)$$

Із поляризаційної формули (1) і поляризаційної нерівності (2) випливає, що простори $\mathcal{L}^s(^{p,q}X)$ і $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ ізоморфні.

3 Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами

Позначимо $\mathbb{Q}^+$ множину раціональних чисел, більших від нуля. Множину функцій $f: X \to \mathbb{C}$ таких, що $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$, де $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}(^{k,m-k}X)$, і для кожного

$r \in \mathbb{Q}^+$ ряд

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sup_{\|x\|\le r}|f_{k,m-k}(x)|$$

є збіжним, будемо позначати $\mathcal{W}(X)$. Множина $\mathcal{W}(X)$ зі звичайними операціями множення на скаляр, додавання і множення функцій разом із системою норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{Q}^+\}$ є алгеброю Фреше.

Зауважимо, що оскільки $\sup_{\|x\|\le r}|f_{k,m-k}(x)| = r^m\|f_{k,m-k}\|$, то

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\|.$$

Для кожного лінійного неперервного функціонала φ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що φ — неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Визначимо радіус-функцію $R : \mathcal{W}(X)' \to \mathbb{R}$, поклавши для $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ за $R(\varphi)$ інфімум таких $r \in \mathbb{Q}^+$, що φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.

Звуження лінійного функціонала $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ на простір $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ будемо позначати $\pi_{p,q}(\varphi)$. Наступні дві теореми встановлюють зв'язок між значенням радіус-функції і нормами звужень на простори неперервних (p,q)-поліномів для лінійного функціонала на $\mathcal{W}(X)$.

Теорема 1. *([1]) Для значення радіус-функції на лінійному неперервному функціоналі φ виконується рівність*

$$R(\varphi) = \limsup_{m\to\infty}\max_{0\le k\le m}\|\pi_{k,m-k}(\varphi)\|^{1/m}.$$

Теорема 2. *([1]) Нехай φ — лінійний функціонал на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Якщо звуження φ на простори $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ для всіх $p,q \in \mathbb{Z}_+$ неперервні і їх норми задовольняють оцінку $\|\pi_{p,q}(\varphi)\| \le cs^{p+q}$ для деяких фіксованих $c, s > 0$, то φ — неперервний лінійний функціонал і $R(\varphi) \le s$.*

4 Оператор зсуву

Нехай $x \in X$. Визначимо оператор зсуву T_x на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ наступним чином:

$$(T_x f)(y) = f(x+y), \quad \text{де} \quad f \in \mathcal{W}(X),\ y \in X.$$

Теорема 3. *При фіксованому $x \in X$ для функції $f \in \mathcal{W}(X)$ значення оператора зсуву $T_x f$ буде належати алгебрі $\mathcal{W}(X)$.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$(T_x f)(y) = f(x+y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x+y).$$

Відомо, що

$$f_{k,m-k}(x+y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j),$$

де $A_{f_{k,m-k}}$ — це $(k, m-k)$-лінійна симетрична форма, асоційована з $f_{k,m-k}$, а через $A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)$ позначено $A_{f_{k,m-k}}(\underbrace{x,\dots,x}_{k-i}, \underbrace{y,\dots,y}_{i}; \underbrace{x,\dots,x}_{m-k-j}, \underbrace{y,\dots,y}_{j})$.

Звідси

$$\begin{aligned}(T_x f)(y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j).\end{aligned}$$

Переконаємося, що для кожного $r > 0$ існує скінченна норма $\|T_x f\|_r$. За означенням,

$$\|T_x f\|_r = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{\|y\|\le r}\Big|\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)\Big|.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\|T_x f\|_r &\le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \sup_{\|y\|\le r}\big|A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)\big| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \sup_{\|y\|\le r}\big|A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)\big|.\end{aligned}$$

Згідно із оцінкою (4),

$$|A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)| \le (2e)^m\|f_{k,m-k}\|\|x\|^{m-i-j}\|y\|^{i+j}.$$

Звідси

$$\sup_{\|y\|\le r}|A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)| \le (2e)^m\|f_{k,m-k}\|\|x\|^{m-i-j}r^{i+j}.$$

Тому

$$\begin{aligned}\|T_x f\|_r &\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j (2e)^m\|f_{k,m-k}\|\|x\|^{m-i-j}r^{i+j} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\|\sum_{i=0}^{k} C_k^i r^i\|x\|^{k-i}\sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j r^j\|x\|^{m-k-j} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\|(r+\|x\|)^k(r+\|x\|)^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(2e(r+\|x\|))^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\| = \|f\|_{2e(r+\|x\|)}.\end{aligned}$$

Отже, $\|T_xf\|_r \le \|f\|_{2e(r+\|x\|)}$. Оскільки $f \in \mathcal{W}(X)$, то $\|f\|_{2e(r+\|x\|)}$ — скінченна, тому скінченною для довільного r буде $\|T_xf\|_r$. Звідси, $T_xf \in \mathcal{W}(X)$. □

Теорема 4. *Нехай φ — лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$, f — деяка фіксована функція, яка належить алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Тоді функція $x \mapsto \varphi(T_xf)$ належить алгебрі $\mathcal{W}(X)$.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$(T_xf)(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j}).$$

Нехай $P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j} : y \longmapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})$. Очевидно, що $P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}$ — $(k-i, m-k-j)$-поліномом. Тепер

$$T_xf = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}$$

і

$$\varphi(T_xf) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^iC_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}).$$

Оскільки відображення $x \mapsto \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})$ є (i,j)-поліномом, то відображення $x \mapsto \sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^iC_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})$ також є (i,j)-поліномом. Отже, відображення $x \mapsto \varphi(T_xf)$ зображається у вигляді ряду (p,q)-поліномів. Доведемо, що для довільного $r > 0$ буде $\|x \mapsto \varphi(T_xf)\|_r < \infty$. За означенням,

$$\|x \mapsto \varphi(T_xf)\|_r = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{\|x\|\le r}\Big|\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^iC_{m-k}^j \varphi_{k-i,m-k-j}(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})\Big|.$$

Звідси

$$\|x \mapsto \varphi(T_xf)\|_r \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=i+j}^{\infty}\sum_{k=i}^{m-j} C_k^iC_{m-k}^j \sup_{\|x\|\le r}|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})|.$$

Оскільки $|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})| \le \|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\|\|P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}\|$ і

$$\|P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}\| = \sup_{\|y\|\le1}|P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}(y)| = \sup_{\|y\|\le1}|A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})|$$
$$\le \sup_{\|y\|\le1}(2e)^m\|f_{k,m-k}\|\|x\|^i\|y\|^{k-i}\|x\|^j\|y\|^{m-k-j} = (2e)^m\|f_{k,m-k}\|\|x\|^{i+j},$$

то

$$\sup_{\|x\|\le r}|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})| \le \sup_{\|x\|\le r}(2e)^m\|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\|\|f_{k,m-k}\|\|x\|^{i+j}$$
$$= (2e)^m\|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\|\|f_{k,m-k}\|r^{i+j}.$$

Оскільки φ — неперервний лінійний функціонал, то $R(\varphi) < \infty$. Візьмемо деяке число $s > R(\varphi)$. Тоді існує таке число $c > 1$, що $\|\pi_{k,m-k}(\varphi)\| \le cs^m$. Звідси

$$\|x \mapsto \varphi(T_xf)\|_r \le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j cs^{m-i-j}(2e)^m\|f_{k,m-k}\|r^{i+j}$$
$$= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\|\sum_{i=0}^{k}C_k^is^{k-i}r^i\sum_{j=0}^{m-k}C_{m-k}^js^{m-k-j}r^j$$
$$= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\|(r+s)^m$$
$$= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e(r+s))^m\sum_{k=0}^{m}\|f_{k,m-k}\| = c\|f\|_{2e(r+s)} < \infty.$$

Отже, $(x \mapsto \varphi(T_xf)) \in \mathcal{W}(X)$. □

5 Згортка лінійних функціоналів

Для лінійних неперервних функціоналів $\varphi, \theta \in \mathcal{W}(X)'$ визначимо згортку $\varphi * \theta$ як функцію на $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto (T_xf)(y))), \quad f \in \mathcal{W}(X).$$

Очевидно, що $\varphi * \theta$ є лінійним функціоналом. Доведемо неперервність.

Теорема 5. *Для лінійних неперервних функціоналів $\varphi, \theta \in \mathcal{W}(X)'$ згортка $\varphi * \theta$ є лінійним неперервним функціоналом. При цьому $R(\varphi * \theta) \le 2e(R(\varphi) + R(\theta))$.*

Доведення. Оцінімо норми звужень згортки $\varphi * \theta$ на простори $(k, m-k)$-поліномів, де $m \ge 0$, $0 \le k \le m$. Для цього оцінимо значення $\varphi * \theta$ на $(k, m-k)$-поліномі $f_{k,m-k}$.

$$(\varphi * \theta)(f_{k,m-k}) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto (T_xf_{k,m-k})(y))) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto f_{k,m-k}(x+y)))$$
$$= \varphi\Big(x \mapsto \theta\Big(y \mapsto \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})\Big)\Big)$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^iC_{m-k}^j \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j}))).$$

Оцінимо значення $(\varphi * \theta)(f_{k,m-k})$ по модулю.

$$
\begin{aligned}
|(\varphi*\theta)(f_{k,m-k})| &\le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j |\varphi(x\mapsto\theta(y\mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i,y^{k-i};x^j,y^{m-k-j})))| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \sup_{\|x\|\le1} |\theta(y\mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i,y^{k-i};x^j,y^{m-k-j}))| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \sup_{\|x\|\le1} \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\| \sup_{\|y\|\le1} |A_{f_{k,m-k}}(x^i,y^{k-i};x^j,y^{m-k-j})| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\|\|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\| \sup_{\|x\|\le1}\sup_{\|y\|\le1} \|A_{f_{k,m-k}}\|\|x\|^i\|y\|^{k-i}\|x\|^j\|y\|^{m-k-j} \\
&= \|A_{f_{k,m-k}}\| \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\|\|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\| \\
&\le (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\|\|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\|.
\end{aligned}
$$

Тепер оцінимо норму лінійного функціонала $\pi_{k,m-k}(\varphi*\theta)$.

$$
\begin{aligned}
\|\pi_{k,m-k}(\varphi*\theta)\| &= \sup_{\|f_{k,m-k}\|\le1} |\pi_{k,m-k}(\varphi*\theta)(f_{k,m-k})| \\
&\le (2e)^m \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\|\|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\|.
\end{aligned}
$$

Візьмемо числа $s_1 > R(\varphi)$ і $s_2 > R(\theta)$. Тоді існують такі числа $c_1, c_2 > 0$, що для довільних $p, q \in \mathbb{Z}_+$ буде $\|\pi_{p,q}(\varphi)\| \le c_1 s_1^{p+q}$ і $\|\pi_{p,q}(\theta)\| \le c_2 s_2^{p+q}$. Використаємо ці оцінки.

$$
\begin{aligned}
\|\pi_{k,m-k}(\varphi*\theta)\| &\le (2e)^m \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j c_1 s_1^{i+j} c_2 s_2^{k-i+m-k-j} \\
&= c_1c_2(2e)^m \sum_{i=0}^{k} C_k^i s_1^i s_2^{k-i} \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j s_1^j s_2^{m-k-j} = c_1c_2(2e)^m(s_1+s_2)^m.
\end{aligned}
$$

Позначимо $c = c_1c_2$, $s = 2e(s_1+s_2)$. Тоді для норм звужень згортки на простори $(k, m-k)$-поліномів маємо оцінку $\|\pi_{k,m-k}(\varphi*\theta)\| \le cs^m$. За теоремою 2 згортка $\varphi*\theta$ є неперервним лінійним функціоналом на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Для радіус-функції маємо оцінку $R(\varphi*\theta) \le s = 2e(s_1+s_2)$. Оскільки s_1 і s_2 вибрані довільно, то

$$R(\varphi*\theta) \le 2e(R(\varphi)+R(\theta)).$$

□

Доведемо ще одну властивість згортки.

Теорема 6. *Нехай φ, θ — лінійні неперервні функціонали на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Якщо φ, θ є характерами, то $\varphi*\theta$ також є характером.*

Доведення. Перевіримо, що для довільних функцій $f, g \in \mathcal{W}(X)$ виконується рівність

$$(\varphi*\theta)(fg) = (\varphi*\theta)(f)(\varphi*\theta)(g).$$

За означенням, $(\varphi*\theta)(fg) = \varphi(x\mapsto\theta(y\mapsto(fg)(x+y)))$. Оскільки φ, θ є характерами, то

$$\theta(y\mapsto(fg)(x+y)) = \theta(y\mapsto f(x+y)g(x+y)) = \theta(y\mapsto f(x+y))\theta(y\mapsto g(x+y))$$

і

$$
\begin{aligned}
(\varphi*\theta)(fg) &= \varphi\Big(x\mapsto\theta(y\mapsto f(x+y))\theta(y\mapsto g(x+y))\Big) \\
&= \varphi\Big(x\mapsto\theta(y\mapsto f(x+y))\Big)\varphi\Big(x\mapsto\theta(y\mapsto g(x+y))\Big) = (\varphi*\theta)(f)(\varphi*\theta)(g).
\end{aligned}
$$

□

Для скінченної послідовності $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{W}(X)'$ згортку $\varphi_1*\ldots*\varphi_n$ будемо позначати $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n}\varphi_k$.

6 Спектр алгебри $\mathcal{W}(X)$

Нехай $(n,l) \in \mathbb{Z}_+^2$. Визначимо множини $\overline{\Lambda}_{n,l}, \Lambda_{n,l} \subset \mathbb{Z}_+^2$ наступним чином

$$\overline{\Lambda}_{n,l} = \{(i,j):\ 0\le i\le n,\ 0\le j\le l\},$$

$$\Lambda_{n,l} = \overline{\Lambda}_{n,l} \setminus \{(n,l)\}.$$

Нехай $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ — замикання підалгебри алгебри $\mathcal{W}(X)$, породженої (p,q)-поліномами, для яких $(p,q)\in\Lambda_{n,l}$ і нехай $\mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{n,l}}(X)$ — замикання підалгебри алгебри $\mathcal{W}(X)$, породженої (p,q)-поліномами, для яких $(p,q)\in\overline{\Lambda}_{n,l}$.

У [1] доведено таку теорему:

Теорема 7. *Нехай φ — лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\varphi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}({}^{n,l}X)\cap\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$, але при цьому $\pi_{n,l}(\varphi)\ne0$. Тоді існує неперервний комплекснозначний гомоморфізм ψ на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\pi_{p,q}(\psi) = 0$, якщо $(p,q)\in\Lambda_{n,l}$, і $\pi_{n,l}(\psi) = \pi_{n,l}(\varphi)$. Радіус-функція*

$$R(\psi) \le e\frac{n+l}{n^{n/(n+l)}l^{l/(n+l)}}\|\pi_{n,l}(\varphi)\|^{1/(n+l)}.$$

Із того, що ψ — характер і $\pi_{p,q}(\psi) = 0$ для $(p,q)\in\Lambda_{n,l}$ випливає

Наслідок 6.1. *$\pi_{p,q}(\psi)$ не дорівнює нулю тільки якщо існує $k\in\mathbb{Z}_+$ таке, що $p = kn$ і $q = kl$.*

Побудуємо функцію $\varkappa : \mathbb{Z}_+^2 \to \mathbb{Z}_+$, поклавши $\varkappa(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ для $(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2$. Можна перевірити, що $\varkappa$ є біекцією. Позначимо через γ обернене відображення до $\varkappa$.

Нехай I_k буде мінімальний замкнутий ідеал алгебри $\mathcal{W}(X)$, породжений всіма неперервними (p,q)-поліномами, для яких $0 < \varkappa(p,q) \leq k$.

Множину характерів алгебри $\mathcal{W}(X)$ будемо позначати $M_{\mathcal{W}(X)}$.

Нехай для $k \geq 1$

$$\Phi_k = \{\varphi \in M_{\mathcal{W}(X)} : \quad \ker \varphi \supset I_k\}.$$

Також покладемо $\Phi_0 = M_{\mathcal{W}(X)}$.

Доведемо деякі допоміжні результати.

Теорема 8. *Якщо для пари $(n,l) \neq (0,0)$ алгебра $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ не співпадає з алгеброю $\mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{n,l}}(X)$, то існує такий характер $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, що $\psi \notin \Phi_{\varkappa(n,l)}$.*

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$ і $P \notin \mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$. Оскільки алгебра $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ є замкнутим підпростором алгебри $\mathcal{W}(X)$, то за теоремою Гана-Банаха існує лінійний функціонал $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ такий, що $\varphi(f) = 0$ для кожної функції $f \in \mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ і $\varphi(P) \neq 0$. За теоремою 7 існує характер ψ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\psi_{p,q} = 0$, якщо $(p,q) \in \Lambda_{n,l}$ і $\psi_{n,l} = \varphi_{n,l}$. Неважко переконатись, що для жодного значення $k \in \mathbb{N}$ пара (kn, kl) не належить множині $\{(i,j) : 0 < \varkappa(i,j) \leq \varkappa(n,l) - 1\}$, тому за наслідком 6.1 $\ker \psi \supset I_{\varkappa(n,l)-1}$ і $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$. Оскільки $\psi(P) \neq 0$, то $\psi \notin \Phi_{\varkappa(n,l)}$. □

Теорема 9. *Якщо $\varphi, \psi \in M_{\mathcal{W}(X)}$, $\varphi, \psi \neq 0$ і $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(P) + \psi(P)$ для довільного $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$.*

Доведення. За означенням, $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(x \mapsto \psi(y \mapsto (T_x P)(y)))$. Оскільки

$$(T_x P)(y) = P(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j A_P(x^i, y^{n-i}; x^j, y^{l-j}),$$

то

$$\psi(y \mapsto (T_x P)(y)) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j \psi(y \mapsto A_P(x^i, y^{n-i}; x^j, y^{l-j})).$$

Оскільки $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то $\pi_{\gamma(k)}(\psi) = 0$ для $1 \leq k \leq \varkappa(n,l) - 1$. Звідси випливає, що $\pi_{n-i,l-j}(\psi) = 0$ при $(n-i, l-j) \in \Lambda_{n,l} \setminus \{(0,0)\}$, тому

$$\begin{aligned}\psi(y \mapsto (T_x P)(y)) &= \psi(y \mapsto A_P(x^n; x^l)) + \psi(y \mapsto A_P(y^n; y^l)) \\ &= \psi(y \mapsto P(x)) + \psi(y \mapsto P(y)) = P(x)\psi(y \mapsto 1) + \psi(P).\end{aligned}$$

Оскільки ψ — ненульовий характер, то $\psi(y \mapsto 1) = 1$. Тому

$$\psi(y \mapsto (T_x P)(y)) = P(x) + \psi(P).$$

Звідси

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)(P) = \varphi(x \mapsto P(x) + \psi(P)) &= \varphi(x \mapsto P(x)) + \varphi(x \mapsto \psi(P)) \\ &= \varphi(P) + \psi(P)\varphi(x \mapsto 1) = \varphi(P) + \psi(P).\end{aligned}$$

□

Теорема 10. *Якщо $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$ і послідовність $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ така, що $\varphi_j \in \Phi_{j-1}$, то для довільного $m > \varkappa(n,l)$ буде $(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\varkappa(n,l)} \varphi_j)(P)$.*

Доведення. Оскільки $\varphi_m \in \Phi_{m-1} \subset \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то за теоремою 9

$$(\mathop{\ast}_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = ((\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \varphi_j) * \varphi_m)(P) = (\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P) + \varphi_m(P).$$

З того, що $\varphi_m \in \Phi_{m-1} \subset \Phi_{\varkappa(n,l)}$ випливає, що $\varphi_m(P) = 0$. Тому $(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P)$. Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$(\mathop{\ast}_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}_{j=1}^{m-2} \varphi_j)(P) = \ldots = (\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(n,l)} \varphi_j)(P).$$

□

Для послідовності $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_{\mathcal{W}(X)}$, $\varphi_n \in \Phi_{n-1}$ нескінченною згорткою будемо вважати такий лінійний мультиплікативний функціонал на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів, що $(\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\varkappa(p,q)} \varphi_n)(P)$ для $P \in \mathcal{P}(^{p,q}X)$. У випадку, коли цей функціонал неперервний, його можна продовжити до лінійного неперервного мультиплікативного функціонала φ на $\mathcal{W}(X)$. В цьому випадку будемо використовувати те саме позначення $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$.

Теорема 11. *Існує послідовність спряжених банахових просторів $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ і послідовність відображень $\delta^{(n)} : E_n \to M_{\mathcal{W}(X)}$ таких, що довільний характер $\varphi \in M_{\mathcal{W}(X)}$ можна подати у вигляді $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n)$ для деяких елементів $u_n \in E_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доведення. Покладемо $E_1 = \mathcal{P}(^{0,1}X)' = \overline{X}''$, $\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$ — функціонал значення функції в точці $\overline{X}''$. Припустимо, що простори E_k і відображення $\delta^{(k)}$ вже побудовано для $k < n$. Позначимо E_n множину $\{\pi_{\gamma(n)}(\varphi) : \quad \varphi \in \Phi_{n-1}\}$, де $\pi_{\gamma(n)}(\varphi)$ — звуження φ на підпростір $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$. Очевидно, кожен елемент множини E_n є лінійним функціоналом на просторі $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$, який перетворюється в нуль на всіх елементах простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X) \cap \mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X)$. Отже, кожен елемент множини E_n є елементом простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$, де через $I_{n-1}^{\perp}$ позначено простір лінійних функціоналів на $\mathcal{W}(X)$, які перетворюються в нуль на ідеалі I_{n-1}. Якщо $\mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X) = \mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{\gamma(n)}}(X)$ то $E_n = \{0\}$, інакше за теоремою 8 множина E_n містить ненульові точки.

Покажемо, що E_n є лінійним простором зі звичайними операціями суми елементів і множення на скаляр. Для цього достатньо показати, що ці операції не виводять за межі E_n.

Нехай $\varphi, \psi \in \Phi_{n-1}$. Для довільного $P \in \mathcal{P}(^{\gamma(x)}X)$ за теоремою 9 $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(P) + \psi(P)$. Звідси $\pi_{\gamma(n)}(\varphi * \psi)(P) = \pi_{\gamma(n)}(\varphi)(P) + \pi_{\gamma(n)}(\psi)(P)$. Отже, $\pi_{\gamma(n)}(\varphi) + \pi_{\gamma(n)}(\psi) = \pi_{\gamma(n)}(\varphi * \psi)$.

Нехай $\varphi \in \Phi_{n-1}$, a — довільне комплексне число. Покажемо, що $a\pi_{\gamma(n)}(\varphi) \in E_n$. Оскільки $a\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ і $a\varphi$ перетворюється в нуль на елементах простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X) \cap$

$\mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X)$, то за теоремою 7 існує такий характер ψ, що $\pi_{\gamma(n)}(\psi) = \pi_{\gamma(n)}(a\varphi)$. Звідси, $a\pi_{\gamma(n)}(\varphi) = \pi_{\gamma(n)}(a\varphi) = \pi_{\gamma(n)}(\psi) \in E_n$, оскільки $\psi \in \Phi_{n-1}$. Отже, E_n — лінійний простір.

Визначимо простір $W_n = \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X))$. Тоді W_n є банаховим простором лінійних функціоналів на просторі E_n. Визначимо норму $\|\cdot\|_n$ на E_n як супремум значень на векторі із E_n елементів одиничної кулі простору W_n. Очевидно, простір W_n' співпадає з простором $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$. Як було вже сказано, кожен елемент простору E_n міститься в $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$. З іншого боку, якщо $u \in \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$, то за теоремою 7 існує такий характер $\varphi \in \Phi_{n-1}$, що $u = \pi_{\gamma(n)}(\varphi)$, отже, $u \in E_n$. Звідси робимо висновок, що $E_n = W_n'$.

Для $w \in E_n$ нехай $\delta^{(n)}(w)$ — характер, який існує за теоремою 7, якщо в ролі лінійного функціонала взяти w. Для довільного характера φ покладемо $u_1 = \pi_{\gamma(1)}(\varphi) \in \overline{X}''$. Припустимо, що уже визначено елементи $u_k \in E_k$ для $k < n$. Покладемо

$$u_n = \pi_{\gamma(n)}(\varphi) - \pi_{\gamma(n)}\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right).$$

Покажемо, що $u_n \in E_n$. Достатньо перевірити, що для кожного (p,q)-полінома $P \in \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$, який є добутком (p,q)-поліномів P_1, P_2 таких, що $(\deg_1 P_1, \deg_2 P_1) = (n_1, l_1) \neq (0,0)$ і $(\deg_1 P_2, \deg_2 P_2) = (n_2, l_2) \neq (0,0)$ буде $u_n(P) = 0$. Із мультиплікативності φ і $\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)$ отримуємо

$$\begin{aligned}
u_n(P) &= \pi_{\gamma(n)}(\varphi)(P_1P_2) - \pi_{\gamma(n)}\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1P_2) = \varphi(P_1P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1P_2)\\
&= \varphi(P_1)\varphi(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2)\\
&= \pi_{n_1,l_1}(\varphi)(P_1)\pi_{n_2,l_2}(\varphi)(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2).
\end{aligned}$$

За теоремою 10

$$\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1) = \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)$$

і

$$\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2) = \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2).$$

Згідно із припущенням

$$u_{\varkappa(n_1,l_1)}(P_1) = \pi_{n_1,l_1}(\varphi)(P_1) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)$$

і

$$u_{\varkappa(n_2,l_2)}(P_2) = \pi_{n_2,l_2}(\varphi)(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2).$$

Тому, скориставшись теоремою 9, маємо

$$\begin{aligned}
u_n(P) &= \left(u_{\varkappa(n_1,l_1)}(P_1) + \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\right)\\
&\quad\times\left(u_{\varkappa(n_2,l_2)}(P_2) + \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2)\right)\\
&\quad-\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2)\\
&= \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2)\\
&\quad-\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2) = 0.
\end{aligned}$$

Розглянемо функціонал $\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$. Нехай $f = \sum_{m=0}^{s}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$ — довільна функція, породжена скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. Оскільки $u_k \in E_k$, то за теоремою 10 маємо

$$\begin{aligned}
\left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)\right)(f) &= \sum_{m=0}^{s}\sum_{k=0}^{m}\left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)\right)(f_{k,m-k})\\
&= f(0) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{k=0}^{m}\left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,m-k)} \delta^{(j)}(u_j)\right)(f_{k,m-k}).
\end{aligned}$$

Отже, згортка $\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ є визначеною на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. З іншого боку, для довільного $P \in \mathcal{P}(^{k,l}X)$

$$\begin{aligned}
\left(\varphi - \mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P) &= \pi_{k,l}(\varphi)(P) - \left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P)\\
&= u_{\varkappa(k,l)}(P) + \left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)-1} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P) - \left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P)\\
&= \delta^{(\varkappa(k,l))}(u_{\varkappa(k,l)})(P) + \left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)-1} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P) - \left(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j)\right)(P) = 0.
\end{aligned}$$

Отже, φ співпадає з $\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. Ця алгебра є щільною в $\mathcal{W}(X)$, тому $\varphi = \mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ на $\mathcal{W}(X)$. □

7 Диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$

Нехай $u_{p,q} \in E_{\varkappa(p,q)}$. Визначимо лінійний функціонал $\theta(u_{p,q})$ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$\theta(u_{p,q})(f) = \begin{cases} u_{p,q}(f), & \text{якщо } f \in \mathcal{P}(^{p,q}X),\\ 0, & \text{якщо } f \in \mathcal{P}(^{m,k}X) \text{ і } (m,k) \neq (p,q). \end{cases}$$

Визначимо лінійний оператор $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ на $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f)(x) = \theta(u_{p,q})(y \mapsto (T_x f)(y)).$$

Нехай $n \geq p$ і $l \geq q$ і нехай A_P — це (n,l)-лінійна симетрична форма, асоційована з деяким (n,l)-поліномом P. Тоді відображення $y \mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q)$ буде (p,q)-поліномом. Значення $u_{p,q}(y \mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q))$ будемо позначати $\widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q})$.

Теорема 12. *Нехай $u_{p,q} \in E_{\varkappa(p,q)}$. Тоді оператор $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ є неперервним оператором диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. При цьому для $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$*

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) = \begin{cases} C_n^p C_l^q \widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q}), & \text{якщо } n \geq p \text{ і } l \geq q, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{5}$$

Також для кожної функції $f \in \mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$,

$$\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p!)^n}{(np)!} \frac{(q!)^n}{(nq)!} \partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{np,nq}).$$

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$. Тоді

$$\begin{aligned}\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) &= \theta(u_k)(y \mapsto (T_x P)(y)) = \theta(u_k)(y \mapsto P(x+y)) \\ &= \theta(u_{p,q})(g \mapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j \theta(u_{p,q})(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}&\theta(u_{p,q})(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)) \\ &\qquad = \begin{cases} u_{p,q}(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)), & \text{якщо } i = p \text{ і } j = q, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}\end{aligned}$$

то

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) = \begin{cases} C_n^p C_l^q \widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q}), & \text{якщо } n \geq p \text{ і } l \geq q, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Отже, рівність (5) доведено.

Доведемо, що для кожної функції f із $\mathcal{W}(X)$ функція $g(x) = \partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f)(x)$ буде належати алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{k,m-k})(x) \\ &= \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)).\end{aligned}$$

Позначимо $g_{k-p,m-k-q}(x) = C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q))$.

Тоді $g = \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} g_{k-p,m-k-q}$ і $g_{k-p,m-k-q} \in \mathcal{P}(^{k-p,m-k-q}X)$. Оцінимо норму $(k-p, m-k-q)$-полінома $g_{k-p,m-k-q}$.

$$\begin{aligned}\|g_{k-p,m-k-q}\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |g_{k-p,m-k-q}(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q))| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \|y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \sup_{\|y\|\leq 1} |A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \sup_{\|y\|\leq 1} \|A_{f_{k,m-k}}\| \|x\|^{k-p} \|y\|^p \|x\|^{m-k-q} \|y\|^q = C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \|A_{f_{k,m-k}}\|.\end{aligned}$$

Оскільки $C_k^p \leq 2^k$, $C_{m-k}^q \leq 2^{m-k}$ і $\|A_{f_{k,m-k}}\| \leq (2e)^m \|f_{k,m-k}\|$, то

$$\|g_{k-p,m-k-q}\| \leq 2^k 2^{m-k} (2e)^m \|u_{p,q}\| \|f_{k,m-k}\| = (4e)^m \|u_{p,q}\| \|f_{k,m-k}\|.$$

Нехай $r > 0$. Має місце оцінка

$$\|g\|_r = \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} r^{m-p-q} \|g_{k-p,m-k-q}\| \leq \|u_{p,q}\| \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} r^{m-p-q} (4e)^m \|f_{k,m-k}\|.$$

Позначимо $\rho = \max\{1, r\}$. Тоді $r^{m-p-q} \leq \rho^{m-p-q} \leq \rho^m$. Тому

$$\|g\|_r \leq \|u_{p,q}\| \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} \rho^m (4e)^m \|f_{k,m-k}\| \leq \|u_{p,q}\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (4\rho e)^m \|f_{k,m-k}\| = \|u_{p,q}\| \|f\|_{4\rho e}.$$

Оскільки $f \in \mathcal{W}(X)$, то $\|f\|_{4\rho e} < +\infty$. Тому $\|g\|_r < +\infty$. Отже, $g \in \mathcal{W}(X)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$, $Q \in \mathcal{P}(^{m,r}X)$. Доведемо, що

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ) = P\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(Q) + Q\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P). \tag{6}$$

Якщо $n + m < p$ або $l + r < q$, то рівність очевидна. Нехай $n + m \geq p$ і $l + r \geq q$. Нехай A_{PQ} — форма, асоційована з $(n+m, l+r)$-поліномом PQ. Із рівності (5) випливає, що

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x) = C_{n+m}^p C_{l+r}^q \theta(u_{p,q})(y \mapsto A_{PQ}(x^{n+m-p}, y^p; x^{l+r-q}, y^q)).$$

Нехай $z_1, \ldots, z_{n+m}, t_1, \ldots, t_{l+r} \in X$. Тоді

$$\begin{aligned}A_{PQ}(z_1, \ldots, z_{n+m}; t_1, \ldots, t_{l+r}) &= \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{(l+r)!} \\ &\times \sum_{\sigma \in S(n+m)} \sum_{\tau \in S(l+r)} A_P(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}; t_{\tau(1)}, \ldots, t_{\tau(l)}) \\ &\times A_Q(z_{\sigma(n+1)}, \ldots, z_{\sigma(n+m)}; t_{\tau(l+1)}, \ldots, t_{\tau(l+r)}).\end{aligned} \tag{7}$$

Введемо позначення $z = (z_1, \ldots, z_{n+m})$, $t = (t_1, \ldots, t_{l+r})$, $\sigma_1 = \sigma|_{\{1,\ldots,n\}}$, $\sigma_2 = \sigma|_{\{n+1,\ldots,n+m\}}$, $\tau_1 = \tau|_{\{1,\ldots,l\}}$, $\tau_2 = \tau|_{\{l+1,\ldots,l+r\}}$. Розглянувши z як відображення з $\{1, \ldots, n+m\}$ в X, а t як відображення з $\{1, \ldots, l+r\}$ в X, формулу (7) перепишемо у вигляді

$$A_{PQ}(z; t) = \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{(l+r)!} \sum_{\sigma \in S(n+m)} \sum_{\tau \in S(l+r)} A_P(z \circ \sigma_1; t \circ \tau_1) A_Q(z \circ \sigma_2; t \circ \tau_2). \tag{8}$$

Нехай

$$a(\sigma) = \big|\{1,\ldots,n\} \cap \sigma^{-1}\{n+m-p+1,\ldots,n+m\}\big|,$$
$$b(\tau) = \big|\{1,\ldots,l\} \cap \tau^{-1}\{l+r-q+1,\ldots,l+r\}\big|.$$

Тоді

$$A_P(z\circ\sigma_1; t\circ\tau_1) = A_P(x^{n-a(\sigma)}, y^{a(\sigma)}; x^{l-b(\tau)}, y^{b(\tau)}),$$
$$A_Q(z\circ\sigma_2; t\circ\tau_2) = A_Q(x^{m-p+a(\sigma)}, y^{p-a(\sigma)}; x^{r-q+b(\tau)}, y^{q-b(\tau)}).$$

Тепер

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x) = C^p_{n+m}C^q_{l+r}\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}\sum_{\sigma\in S(n+m)}\sum_{\tau\in S(l+r)}\theta(u_{p,q})(y$$
$$\mapsto A_P(x^{n-a(\sigma)}, y^{a(\sigma)}; x^{l-b(\tau)}, y^{b(\tau)})A_Q(x^{m-p+a(\sigma)}, y^{p-a(\sigma)}; x^{r-q+b(\tau)}, y^{q-b(\tau)})).$$

Оскільки $u_{p,q} \in E_{\varkappa(p,q)}$, то в останньому виразі не дорівнюють нулю тільки ті доданки, для яких $a(\sigma) = p$ і $b(\tau) = q$ або $a(\sigma) = b(\tau) = 0$. Кількість тих $\sigma \in S(n+m)$, для яких $a(\sigma) = p$, дорівнює

$$\big|\{\sigma\in S(n+m): \quad a(\sigma)=p\}\big| = \begin{cases} C^p_n p!(n+m-p)!, & \text{при } n \geq p,\\ 0, & \text{при } n < p.\end{cases}$$

Аналогічно

$$\big|\{\tau\in S(l+r): \quad b(\tau)=q\}\big| = \begin{cases} C^q_l q!(l+r-q)!, & \text{при } l \geq q,\\ 0, & \text{при } l < q,\end{cases}$$

$$\big|\{\sigma\in S(n+m): \quad a(\sigma)=0\}\big| = \begin{cases} C^p_m p!(n+m-p)!, & \text{при } m \geq p,\\ 0, & \text{при } m < p,\end{cases}$$

$$\big|\{\tau\in S(l+r): \quad b(\tau)=0\}\big| = \begin{cases} C^q_r q!(l+r-q)!, & \text{при } r \geq q,\\ 0, & \text{при } r < q,\end{cases}$$

Звідси для $n\geq p$, $m \geq p$, $l\geq q$, $r\geq q$

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x) = C^p_{n+m}\, C^q_{l+r}\,\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}p!\,(n+m-p)!\,q!\,(l+r-q)!$$
$$\times\Big(C^p_n\, C^q_l\, u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q)A_Q(x^m; x^r)\big)$$
$$+ C^p_m\, C^q_r\, u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^n; x^l)A_Q(x^{m-p}, y^p; x^{r-q}, y^q)\big)\Big).$$

Оскільки $C^p_{n+m}\, C^q_{l+r}\,\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}p!\,(n+m-p)!\,q!\,(l+r-q)! \;= 1$, то

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x) = \Big(Q(x)\, C^p_n\, C^q_l\, u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q)\big)$$
$$+ P(x)\, C^p_m\, C^q_r\, u_{p,q}\big(y\mapsto A_Q(x^{m-p}, y^p; x^{r-q}, y^q)\big)\Big).$$

Враховуючи формулу (5), отримуємо $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ) = P\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(Q) + Q\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)$. Отже, ми довели рівність (6) для випадку $n, m \geq p$ і $l, r \geq q$. Для всіх інших випадків цю рівність також перевірити нескладно.

Із рівності (6) і лінійності оператора $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ випливає, що цей оператор є оператором диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^{np,nq}X)$. Після n-кратного застосування формули (5) отримаємо

$$\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(P) = C^p_{np}C^p_{(n-1)p}\ldots C^p_p C^q_{nq}C^q_{(n-1)q}\ldots C^q_q\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P)$$
$$= \frac{(np)!}{(p!)^n}\frac{(nq)!}{(q!)^n}\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P).$$

Звідси

$$\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P) = \frac{(p!)^n}{(np)!}\frac{(q!)^n}{(nq)!}\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(P).$$

Нехай $f\in\mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^\infty\sum_{k=0}^m f_{k,m-k}$. Тоді

$$\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f) = \sum_{m=0}^\infty\sum_{k=0}^m \delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f_{k,m-k})$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f_{np,nq}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(p!)^n}{(np)!}\frac{(q!)^n}{(nq)!}\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{np,nq}).$$

□

8 Похідна за напрямком у дійсному сенсі на алгебрі $\mathcal{W}(X)$

Нехай $h\in X$. Знайдемо похідну за напрямком h від $P\in\mathcal{P}({}^{p,q}X)$, розглядаючи X як простір з дійсною структурою.

$$\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{P(x+th)-P(x)}{t}$$
$$= \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{i=0}^p\sum_{j=0}^q C^i_pC^j_q A_P(x^{p-i}, (th)^i; x^{q-j}, (th)^j) - A_P(x^p; x^q)\right)$$
$$= \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{i=0}^p\sum_{j=0}^q C^i_pC^j_q t^{i+j} A_P(x^{p-i}, h^i; x^{q-j}, h^j) - A_P(x^p; x^q)\right)$$
$$= C^1_pC^0_qA_P(x^{p-1}, h; x^q) + C^0_pC^1_qA_P(x^p; x^{q-1}, h) = \partial_{(1,0)}(h_{1,0})(P)(x) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1})(P)(x),$$

де через $h_{1,0}$ позначено лінійний функціонал на просторі $\mathcal{P}({}^{1,0}X)$, який кожному $g\in\mathcal{P}({}^{1,0}X)$ ставить у відповідність число $g(h)$, через $h_{0,1}$ позначено лінійний функціонал на просторі $\mathcal{P}({}^{0,1}X)$, який кожному $g\in\mathcal{P}({}^{0,1}X)$ ставить у відповідність число $g(h)$. Отже,

$$\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{P(x+th)-P(x)}{t} = (\partial_{(1,0)}(h_{1,0}) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(P)(x).$$

Для $f \in \mathcal{W}(X)$ будемо мати

$$\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0} \frac{1}{t}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x+th) - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x)\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0} \frac{f_{k,m-k}(x+th)-f_{k,m-k}(x)}{t} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} (\partial_{(1,0)}(h_{1,0}) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(f_{k,m-k})(x)$$
$$= (\partial_{(1,0)}(h_{1,0}) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(f)(x).$$

Література

1. Василишин Т.В. *Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банаховому просторі* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. (в друці)
2. Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. London Math. Soc., **35** (2003), 55–64.
3. Aron R.M., Cole B.J. and Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51–93.
4. Vasylyshyn T.V., Zagorodnyuk A.V. *Polarization formula for (p,q)-polynomials on a complex normed space*, Methods of Functional Analysis and Topology, **17**, 1 (2011), 75–83.
5. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces*, Contemporary Math., **435** (2007), 381–394.
6. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559–2569.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 14.08.2012

Vasylyshyn T.V. *Description of spectra and derivations of Wiener type algebras of functions generated by (p,q)-polynomials on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 212–228.

It is described a spectra of Wiener type algebras of functions generated by (p,q)-polynomials on Banach spaces. Derivations on these algebras introduced and investigated.

Василишин Т.В. *Описание спектра и дифференцирований в алгебрах типа Винера функций, порожденных (p,q)-полиномами на банаховых пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 212–228.

В работе описано спектры алгебр типа Винера функций, порожденных (p,q)-полиномами на банаховых пространствах, а также введены и исследованы дифференцирования на этих алгебрах.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.21

Герич М.С.

УТОЧНЕННЯ ОСНОВНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЙНОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ГРАТЧАСТИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

Герич М.С. *Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 229–240.

Нехай $\{\xi(t), x(t)\}$ — майже напівнеперервний гратчастий однорідний пуассонівський процес на ланцюгу Маркова. Стрибки одного знаку для $\xi(t)$ геометрично розподілені, протилежного знаку — мають довільний гратчастий розподіл. Для таких процесів встановлені співвідношення для компонент двосторонньої матричної факторизації. Ці співвідношення визначають генератриси екстремумів процесу та їх доповнень.

Вступ

Процеси з незалежними приростами (н.п.) на ланцюгах Маркова (ЛМ) часто називають адитивними процесами на ЛМ або процесами в марковському середовищі (див. роботи [8, 9]); в статті Єжова І.І., Скорохода А.В. [6] — марковськими процесами, однорідними за другою компонентою; інколи процесами, керованими ЛМ. У вказаних роботах розглядався випадок (C), коли стрибки процесів або випадкових блукань мають неперервний розподіл ((C) — continuity). Випадок (L), коли розподіл стрибків — гратчастий ((L) — lattice) розглядався А.А. Боровковим і Б.А. Рогозіним [1].

Для вивчення розподілу граничних функціоналів процесів, керованих ЛМ, в монографії Д.В. Гусака [2] розвинуто факторизаційний метод у випадку (C). Там одержано уточнені результати для напівнеперервних процесів на ЛМ (зі стрибками одного знаку). В роботах Є.В. Карнауха [7] узагальнено ці результати для майже напівнеперервних процесів.

Для випадку (L) одержані уточнення деяких результатів в спільних роботах Д.В. Гусака та А.І. Туреніязової [4, 5] для напівнеперервних знизу процесів, стрибки яких в одну сторону лише одиничні.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.
Ключові слова і фрази: основна факторизаційна тотожність, майже напівнеперервні процеси на ланцюгах Маркова, генератриса екстремумів процесу та їх доповнень.

В даній роботі перед нами поставлена задача уточнити результати розподілу для граничних функціоналів та їх доповнень (випадок L) майже напівнеперервних гратчастих процесів, для яких стрибки вверх або вниз мають геометричний розподіл. Для такої задачі знайдено вигляд генератрис граничних функціоналів та їх доповнень.

1 Майже напівнеперервні процеси на скінченному ланцюгу Маркова.

Розглянемо двовимірний марковський процес

$$Z(t) = \{\xi(t), x(t)\},\ (t \geq 0,\ \xi(0) = 0)$$

однорідний за часом, з простором станів $\mathbb{Z} \times \mathbb{E}$ ($\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \ldots\}$, $\mathbb{E} = \{1, 2, \ldots, m\}$).

Друга компонента $\{x(t), t \geq 0\}$ процесу $Z(t)$ є однорідним ланцюгом Маркова з матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r|x(0) = k\}\|_{k,r\in\mathbb{E}} = e^{\mathbf{Q}t},$$

де інфінітезимальна (твірна) матриця $\mathbf{Q}$ ЛМ $x(t)$ має вигляд

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),\ \mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}},\ \mathbf{I} = \|\delta_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}},$$

$\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k — часів перебування $x(t)$ в стані k, $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|$ — матриця перехідних імовірностей вкладеного ЛМ $\{y_n = x(\sigma_n + 0), n > 0\}$, σ_n — момент n-ї зміни стану $x(t)$, тоді

$$p_{kr} = P\{y_{n+1} = r|y_n = k\} = P\{y_1 = r|y_0 = k\},$$

$$\sum_{r=1}^{n} p_{kr} = 1,\ p_{rr} = 0,\ n > 0.$$

Розглянемо сукупність незалежних процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$, де $\xi_k(t) = \sum\limits_{i\leq N_k(t)} \xi_i^{(k)}$, а $N_k(t)$— простий пуассонівський процес

$$P\{N_k(t) = r\} = \frac{(\lambda_k t)^r}{r!} e^{-\lambda_k t},$$

$\{\lambda_k > 0\}$ — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k', які визначають час між двома сусідніми скачками процесу $\xi_k(t)$, стрибки $\xi_i^{(k)}$ — сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин для $\xi_k(t)$.

Відносно першої компоненти $\{\xi(t), t \geq 0\}$ будемо припускати, що її прирости на інтервалі $[\sigma_n, \sigma_{n+1})$ мають той же розподіл, що і прирости одного із процесів $\{\xi_k(t)\}$, тобто $\Delta\xi(t) \doteq \Delta\xi_k(t)$, якщо $x(t) = k, t, t+\Delta t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$. Крім того, в момент σ_{n+1} зміни станів, коли вкладений ЛМ переходить із стану $k = x(\sigma_{n+1} - 0)$ в стан $r = x(\sigma_{n+1} + 0)$, процес $\xi(t)$ має додаткові прирости

$$\chi_{kr} = \xi(\sigma_{n+1} + 0) - \xi(\sigma_{n+1} - 0)\ (\chi_{kr} = 0 \text{ при } k = r),$$

причому $\{\chi_{kr}\}_{k,r=1}^m$ — сукупність незалежних випадкових величин, що не залежать від $\xi_k(t)$ з функцією розподілу

$$\mathbf{f}(x) = \|f_{kr}(x)\| = \|p_{kr} P\{\chi_{kr} = x\}\|,$$

та матричною твірною функцією

$$\widetilde{\mathbf{f}}(z) = \|E[z^{\chi_{kr}}, y_1 = r|y_0 = k]\|.$$

В силу однорідності $Z(t)$ за часом по компоненті $\xi(t)$ для опису розподілу цього процесу достатньо розглянути матричну твірну функцію

$$\mathbf{g}_t(z) = \mathbf{E} z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z| = 1,$$

кумулянта процесу має наступний вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \ln \mathbf{E} z^{\xi(t)} = \sum_{x\neq 0} (z^x - 1)(\mathbf{\Lambda p}(x) + \mathbf{N f}(x)) + \mathbf{Q}$$

або в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{I}) + \mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}) + \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr} P\{\xi_1^{(k)} = x\}\|$, $\mathbf{Q}, \mathbf{f}(x), \mathbf{N}, \mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{f}}(z)$ визначені вище, $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$, $\widetilde{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1} = \|E_k z^{\xi_1}\|$, $k, r \in \mathbb{E}$.

Означення 1.1. *Введений таким чином процес $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ називається складним гратчастим процесом Пуассона з незалежними приростами, заданим на скінченному ЛМ.*

Нехай $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$,

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_k^{(1)}, & \xi_1^{(k)} > 0, \\ \lambda_k^{(2)}, & \xi_1^{(k)} < 0, \end{cases}$$

$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{\Lambda}_1 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(1)}\|$, $\mathbf{\Lambda}_2 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(2)}\|$,

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} \mathbf{p}_1(x), & \xi_i^{(k)} > 0, \\ \mathbf{p}_2(x), & \xi_i^{(k)} < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{\mathbf{p}}(z) = \begin{cases} \widetilde{\mathbf{p}}_1(z), & \xi_1^{(k)} > 0, \\ \widetilde{\mathbf{p}}_2(z), & \xi_1^{(k)} < 0, \end{cases}$$

$\mathbf{C} = \|\delta_{kr} C_k\|$, $\mathbf{B} = \|\delta_{kr} B_k\|$, де C_k (B_k) — параметри геометрично розподілених додатних (від'ємних) стрибків $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$.

Означення 1.2. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд*

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2} \sum_{x<0} (z^x - 1)\boldsymbol{p}_2(x) +$$
$$+ \boldsymbol{N} \sum_{x<0} (z^x - 1)\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{Q},$$

або

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\boldsymbol{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \boldsymbol{N}[\widetilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{P}] + \boldsymbol{Q}.$$

Означення 1.3. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд*

$$\boldsymbol{K}(z) = \boldsymbol{\Lambda_1} \sum_{x>0}(z^x - 1)\boldsymbol{p}_1(x) + \boldsymbol{\Lambda_2}[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] +$$

$$+\boldsymbol{N}\sum_{x>0}(z^x - 1)\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{Q},$$

або

$$\boldsymbol{K}(z) = \boldsymbol{\Lambda_1}[\widetilde{\boldsymbol{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + \boldsymbol{\Lambda_2}[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \boldsymbol{N}[\widetilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{P}] + \boldsymbol{Q}.$$

Означення 1.4. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається напівнеперервним зверху (знизу) якщо $\mathbf{C} = 0$ ($\mathbf{B} = 0$), тобто додатні (від'ємні) стрибки процесу одиничні.*

Введемо позначення деяких функціоналів для $\xi(t)$:
— функціонали, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0;t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t);$$

$$\xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t);$$

— функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x;$$

$$\overline{\tau}^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) \ge x\}, \qquad \overline{\gamma}^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x;$$

— функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$:

$$\tau^-(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) < x\}, \qquad \gamma^-(x) = x - \xi(\tau^-(x)).$$

Також введемо позначення розподілів екстремумів:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) = x,\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\| = \mathbf{p}_x^+(s),$$

$$\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) = x\} = \check{\mathbf{p}}_x^+(s),\ x \in \mathbb{Z}^+;$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = x\} = \mathbf{p}_x^-(s),\ \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = x\} = \check{\mathbf{p}}_x^-(s),\ x \in \mathbb{Z}^-,\ \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = x\} = \mathbf{p}_x(s),\ x \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}_+(s),\ \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}_-(s),$$

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}^-(s),\ \mathbf{P}\{\check{\xi}^+(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}^+(s).$$

$$\mathbf{P}_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) < x,\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{P}^+(s,x) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) < x\},\ \mathbf{P}_-(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\},\ \mathbf{P}^-(s,x) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\},$$

$$\mathbf{P}(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x\},\ \overline{\mathbf{P}}(s,x) = \mathbf{P}_s - \mathbf{P}(s,x).$$

$$\mathbf{q}_+(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_+(s),\ \mathbf{q}_-(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_-(s),$$

$$\mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^+(s),\ \mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^-(s).$$

Їм відповідають матричні твірні функцій:

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|E[z^{\xi(\theta_s)},\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)},\ \mathbf{g}_-(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)},$$

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},\ \mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}.$$

Для функціональних послідовностей $\{\mathbf{R}_x, x = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ введемо поняття кілець, розширених кілець і відповідних півкілець та їх проекцій. А саме, позначимо кільце твірних функцій $\widetilde{\mathbf{R}}(z)$

$$\mathbb{L} : \{\widetilde{\mathbf{R}}(z) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} z^x\mathbf{R}_x,\ \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mid \mathbf{R}_x \mid < \infty, |z| = 1\}$$

із операцією "множення" типу згортки та звичайною операцією додавання, а розширення кільця $\mathbb{L}$ —

$$\mathbb{L}_\mathbf{I} : \{\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathbf{R}}(z) = \widetilde{\mathbf{R}}_\mathbf{I}(z),\ \det\widetilde{\mathbf{R}}_\mathbf{I}(z) \neq 0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільця на півосях та їх розширення

$$\mathbb{L}^\pm : \left\{\widetilde{\mathbf{R}}_\pm(z) = \sum_{x=0}^{\pm\infty} z^x\mathbf{R}_x\right\}, \mathbb{L}_\mathbf{I}^\pm : \{\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{R}}_\pm(z), \det[\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{R}}_\pm(z)] \neq 0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z| \ge 1$ ($|z| \le 1$) $\widetilde{\mathbf{R}}_\pm^{\pm1}(z) \in \mathbb{L}_\mathbf{I}^\pm$. Визначимо також операції проектування:

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x\mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x\mathbf{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x\mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x\mathbf{R}_x,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}(z) = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0.$$

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$:

$$P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \ge 0,$$

$$P\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k,\ 0 < \varepsilon < 1,\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Після застосування інтегрального перетворення Лапласа-Карсона по t до $\mathbf{g}_t(z)$ та $\mathbf{P}(t)$ отримаємо

$$\mathbf{g}(s,z) = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{g}_t(z)dt = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1},$$

$$\mathbf{P}_s = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \tag{1}$$

Важливим методом дослідження твірних перетворень розподілів граничних функціоналів є метод, заснований на факторизаційному розкладі $\mathbf{g}(s,z)$ і визначенні цих перетворень у термінах факторизаційних компонент. Має місце матричний аналог основної факторизаційної тотожності (о.ф.т.), яка внаслідок некомутативності компонент є двоїстою.

Лема 1.1. *[2] Для двовимірного процесу $Z(t)$ при $s>0$ має місце матрична о.ф.т. на* $|\, z\,| = 1$

$$\mathbf{g}(s,z) = \boldsymbol{E}\, z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \boldsymbol{g}_+(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\mathbf{g}^-(s,z), \\ \mathbf{g}_-(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\mathbf{g}^+(s,z). \end{cases} \tag{2}$$

Надалі будемо позначати

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ \tau^{\pm}(x)<\infty] = \|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x)) = r|x(0)=k]\|,$$

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x,z) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\ \tau^{\pm}(x)<\infty] = \|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x)) = r|x(0)=k]\|,$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^{+}(s,\varepsilon,z) = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{T}_*^{+}(s,x,z) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}z^{\gamma^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\ \tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty],$$

беручи до уваги, що генератриси $\tau^{\pm}(x)$ розглядаються на ланцюгу $y_x^* = x(\tau^{\pm}(x))$, відповідно. Необхідно зазначити, що множина значень ланцюга $x(\tau^{\pm}(x))$ може звузитися за рахунок недосяжності рівня $x>0$ ($x<0$) процесом $\xi(t)$. Тому будемо накладати наступну умову

$$\forall k\in\mathbb{E}:\ P\{y_x^*=k\}>0.$$

Зв'язок між розподілами $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та генератрисами $\tau^{\pm}(x)$ визначають наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)},\ \tau^+(x)<\infty]\mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^+(s,x)\mathbf{P}_s, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x)},\ \tau^-(x)<\infty]\mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^-(s,x)\mathbf{P}_s.$$

Лема 1.2. *[4] Для процесу $Z(t)$ пара функціоналів $\{\tau^+(x),\ \gamma^+(x)\}$ зв'язана з $\xi^+(\theta_s)$ наступними співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{T}_*^+(s,x,z) = \boldsymbol{E}[z^{\xi^+(\theta_s)-x},\ \xi^+(\theta_s)\ge x](\boldsymbol{g}_+(s,z))^{-1},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_*^+(s,\varepsilon,z) = \frac{(1-\varepsilon)z}{z-\varepsilon}(\boldsymbol{g}_+(s,z)-\boldsymbol{g}_+(s,\varepsilon))(\boldsymbol{g}_+(s,z))^{-1}. \tag{4}$$

Співвідношення (4) називається другою факторизаційною тотожністю (2 ф.т.).

2 Компоненти факторизації

У випадку (C) в роботі [2] були отримані уточнення компонент факторизації (2) для напівнеперервних процесів, а для майже напівнеперервних процесів в [7]. Розглянемо далі аналогічні результати для майже напівнеперервних процесів на ЛМ, але у випадку (L).

Теорема 1. *Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}z)[\mathbf{I}-\boldsymbol{Z}_s^{-1}z]^{-1}\boldsymbol{p}_+(s), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-x}\boldsymbol{p}_+(s),\ x\in\mathbb{Z}^+, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{p}_+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\boldsymbol{P}_s; \tag{7}$$

для $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_-^0$$
$$+\boldsymbol{q}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)<0]), \tag{8}$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s)+(\mathbf{C}-\mathbf{Z}_s^{-1})\boldsymbol{C}^{x-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s)<x]),\ x\in\mathbb{Z}^-\cup\{0\}, \tag{9}$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \boldsymbol{q}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}+\boldsymbol{p}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{C}$.

Доведення. У (4) переходимо до границі при $\varepsilon\to 0$. Внаслідок чого отримуємо наступне співвідношення для $\mathbf{g}_+(s,z)$

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}\mathbf{p}_+(s). \tag{10}$$

Розглянемо для майже напівнеперервного зверху процесу множник $(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}$. Віднімемо від нього одиницю та виконаємо наступні перетворення:

$$(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}-\mathbf{I} = (\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z))^{-1}-\mathbf{I} = \mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)[\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)]^{-1}$$
$$= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}[\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}]^{-1}$$
$$= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-\mathbf{C}z-\mathbf{T}_*^+(s,0)z+\mathbf{T}_*^+(s,0)\mathbf{C}z]^{-1}$$
$$= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-(\mathbf{T}_*^+(s,0)+(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C})z]^{-1}.$$

Позначимо через $\mathbf{Z}_s^{-1} = (\mathbf{T}_*^+(s,0)+(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C}$. З врахуванням умови (3) вираз для $\mathbf{Z}_s^{-1}$ можна переписати у наступному вигляді $\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}$. Згідно з умовою (3) підставивши $\mathbf{Z}_s^{-1}$ отримаємо

$$(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z]^{-1}+\mathbf{I}. \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (10) отримаємо (5). Обернувши формулу (5) по z отримаємо (6). Формулу (7) отримаємо як розвязок матричного рівняння із $\mathbf{Z}_s^{-1}$. Формулу (8) можна одержати із (2), підставляючи представлення для $\mathbf{g}_+(s,z)$, та застосувавши операцію проектування на $[\ ]_-^0$. Співвідношення (9) може бути отримане обертанням (8) по z. □

З попередньої теореми з врахуванням умови напівнеперервності зверху випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *Для напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1} z]^{-1} \boldsymbol{p}_+(s),$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = \mathbf{Z}_s^{-x} \boldsymbol{p}_+(s), \ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\boldsymbol{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}) \boldsymbol{P}_s;$$

для $\bar{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \boldsymbol{P}_s (\boldsymbol{p}_+(s))^{-1} ([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 - \mathbf{Z}_s^{-1} z [\mathbf{g}(s,z)]_-),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{P}_s (\boldsymbol{p}_+(s))^{-1} (\boldsymbol{p}_x(s) - \mathbf{Z}_s^{-1} \boldsymbol{p}_{x-1}(s)), \ x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \boldsymbol{q}_+(s) \boldsymbol{P}_s^{-1}$.

Теорема 2. *Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \boldsymbol{p}^+(s) [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1} z]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{C} z), \tag{12}$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{p}^+(s) \boldsymbol{Q}_s^{-x} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s \boldsymbol{C}], \ x \in \mathbb{Z}^+, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{p}^+(s) = \boldsymbol{P}_s (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1});$$

для $\xi^-(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_-(s,z) &= ([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 \\ &+ \boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)}, \ \xi(\theta_s) < 0] \cdot (\boldsymbol{C} z - \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{C} z (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{Q}_s^{-1})) (\boldsymbol{p}^+(s))^{-1} \boldsymbol{P}_s, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = [\boldsymbol{p}_x^-(s) + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|}, \ \xi(\theta_s) < x] \cdot \boldsymbol{C}^{x-1} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{Q}_s^{-1})] (\boldsymbol{p}^+(s))^{-1} \boldsymbol{P}_s, \ x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}, \tag{15}$$

де $\mathbf{Q}_s^{-1} = \boldsymbol{P}_s^{-1} \boldsymbol{q}^+(s) + \boldsymbol{C} \boldsymbol{P}_s^{-1} \boldsymbol{p}^+(s)$.

Доведення. На основі стохастичних співвідношень для $\tau_{kr}^-(x)$, $(x \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\})$, де нижні індекси означають початкове значення $x(t)$ та значення $x(t)$ в момент досягнення рівня x відповідно $(x(0) = k, \ x(\tau^-(x)) = r)$. Треба зазначити, що розглядаються тільки ті траєкторії процесу, для яких $\tau^-(x) < \infty$

$$\tau_{kr}^-(x) \doteq \begin{cases} \zeta_k', \quad \xi_1^{(k)} < x, \ \zeta_k' < \zeta_k; \\ \zeta_k, \quad \chi_{kr} < x, \ \zeta_k' > \zeta_k; \\ \zeta_k' + \tau_{kr}^-(x - \xi_k), \ \xi_1^{(k)} \ge x, \ \zeta_k' < \zeta_k; \\ \zeta_k + \tau_{kr}^-(x - \chi_{kj}), \ \chi_{kj} \ge x, \ \zeta_k' > \zeta_k, \ (x(\zeta_k) = j). \end{cases}$$

На основі цих стохастичних співвідношень виводимо рівняння

$$\begin{aligned} T_{*kr}^-(s,x) &= E[e^{-s\tau^{\pm}(x)}, \ x(\tau^{\pm}(x)) = r | x(0) = k] \\ &= \lambda_k \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda_k+n_k)y} dy \sum_{l=-\infty}^{x-1} P\{\xi_k = l\} \\ &+ n_k \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda_k+n_k)y} dy \sum_{l=-\infty}^{x-1} p_{kr} P\{\chi_{kr} = l\} \\ &+ \lambda_k \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda_k+n_k)y} dy \sum_{l=x}^{+\infty} e^{-s\tau_{kr}^-(x-l)} P\{\xi_k = l\} \\ &+ n_k \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda_k+n_k)y} dy \sum_{l=x}^{+\infty} e^{-s\tau_{kr}^-(x-l)} p_{kj} P\{\chi_{kj} = l\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Запишемо (16) в матричній формі:

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{N}) \mathbf{T}_*^-(s,x) = \sum_{l=-\infty}^{x-1} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{p}(l) + \mathbf{N} \mathbf{f}(l)) + \sum_{l=x}^{+\infty} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{p}(l) + \mathbf{N} \mathbf{f}(l)) \, \mathbf{T}_*^-(s, x-l). \tag{17}$$

Застосовуючи до (17) твірне перетворення по $x \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ та врахувавши умову майже напівнеперервності зверху, отримаємо

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)) \widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z) &= \frac{z}{z-1} [-\mathbf{\Lambda}_2 (\widetilde{\mathbf{p}}_2(z) - \mathbf{I}) - \mathbf{N} (\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P})] \\ &- \mathbf{\Lambda}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{C}) z (\mathbf{I} - \mathbf{C} z)^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s, \ \mathbf{C}^{-1}), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z) = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathbf{T}_*^-(s,x) = \frac{z}{z-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}_-(s,z) \mathbf{P}_s^{-1}).$$

Підставляючи в (18) останнє співвідношення та (1), отримаємо

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)) \mathbf{g}_-(s,z) = [s\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 (1-z) (\mathbf{I} - \mathbf{C} z)^{-1} \mathbf{g}_-(s, \mathbf{C}^{-1})]. \tag{19}$$

З (19) після врахування другого співвідношення (2), одержимо,

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{P}_s [\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1} (1-z) (\mathbf{I} - \mathbf{C} z)^{-1} \mathbf{g}_-(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{20}$$

Після граничного переходу при $z \to 0$ в (19), отримаємо

$$\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_s [\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1} \mathbf{g}_-(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{21}$$

Підставляючи (21) в формулу (20), одержимо (12). Після обертання (12) по z випливає формула (13). Використовуючи (12) та другий рядок (2), отримаємо, попередньо застосувавши операцію проектування на $[\ ]_-^0$, співвідношення (14). Формула (15) виводиться з (14) за допомогою обертання по z. $\square$

З попередньої теореми, з врахуванням умови напівнеперервності зверху, випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.2. *Для напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \boldsymbol{p}^+(s)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1}z]^{-1},$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{p}_+(s)\mathbf{Q}_s^{-x},\ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{p}^+(s) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1});$$

для $\xi^-(\theta_s)$ *маємо:*

$$\mathbf{g}_-(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 - [\mathbf{g}(s,z)]_-\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = (\boldsymbol{p}_x(s) - \boldsymbol{p}_{x-1}(s)\boldsymbol{Q}_s^{-1})(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Q}_s^{-1} = \boldsymbol{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s)$.

Нехай $Z(t) = \{\xi(t),\, x(t)\}$ — майже напівнеперервний знизу процес, тоді $Z_1(t) = \{\xi_1(t),\, x_1(t)\} = \{-\xi(t),\, x(t)\}$ є майже напівнеперервним зверху. Використовуючи наступні співвідношення між генератрисами екстремумів процесів $Z(t)$ та $Z_1(t)$ та їх розподілів:

$$\mathbf{g}_\mp(s,z) = \mathbf{g}_\pm^1(s,z^{-1}),\ \mathbf{g}^\mp(s,z) = \mathbf{g}_1^\pm(s,z^{-1}),$$

$$\mathbf{p}_\mp(s) = \mathbf{p}_\pm^1(s),\ \mathbf{p}^\mp(s) = \mathbf{p}_1^\pm(s),$$

$$\mathbf{q}_\mp(s) = \mathbf{q}_\pm^1(s),\ \mathbf{q}^\mp(s) = \mathbf{q}_1^\pm(s),$$

$$\mathbf{p}_x^\mp(s) = (\mathbf{p}_{-x}^\pm(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}_x^+(s) = (\check{\mathbf{p}}_{-x}^-(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = (\check{\mathbf{p}}_{-x}^+(s))_1,$$

можна отримати твердження про уточнення компонент факторизації (3) для майже напівнеперервних знизу процесів.

Теорема 3. *Для майже напівнеперервного знизу процесу, заданого на ЛМ, мають місце наступні представлення для генератрис екстремумів та їх розподілів:*
для $\xi^-(\theta_s)$ *маємо:*

$$\mathbf{g}_-(s,z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_s)^{-1}\mathbf{p}_-(s),$$

$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{Z}_s^{-x}\mathbf{p}_-(s),\ x \in \mathbb{Z}^-,$$

$$\mathbf{p}_-(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{P}_s;$$

для $\check{\xi}(\theta_s)$ *маємо:*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_+^0$$
$$+(\boldsymbol{B} - \mathbf{Z}_s)(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}z)^{-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > 0]),$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s) + (\boldsymbol{B} - \mathbf{Z}_s)\mathbf{B}^{-x-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > x]),$$

де $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\boldsymbol{Z}_s = \boldsymbol{q}_-(s)\boldsymbol{P}_s^{-1} + \boldsymbol{p}_-(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{B}$;
для $\bar{\xi}(\theta_s)$ *маємо:*

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \boldsymbol{p}^-(s)[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_s]^{-1}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{p}^-(s)\boldsymbol{Q}_s^{-x}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{B}),\ x \in \mathbb{Z}^-,$$

$$\boldsymbol{p}^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_s);$$

для $\xi^+(\theta_s)$ *маємо:*

$$\mathbf{g}_+(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_+^0$$
$$+\boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > 0])(\boldsymbol{B} - z\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Q}_s))(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\boldsymbol{p}_x(s) + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > x])\boldsymbol{B}^{-x-1}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Q}_s))(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

де $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{q}^-(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{p}^-(s)$.

З попередньої теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Для напівнеперервних знизу процесів генератриси екстремумів та їх розподілів визначаються співвідношеннями:*
для $\xi^-(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}_-(s,z) = z[z\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s]^{-1}\mathbf{p}_-(s),$$

$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = \mathbf{Z}_s^{-x}\mathbf{p}_-(s),\ x \in \mathbb{Z}^-,$$

$$\mathbf{p}_-(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s)\boldsymbol{P}_s;$$

для $\check{\xi}(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 - \mathbf{Z}_s z^{-1}[\mathbf{g}(s,z)]_+),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_-(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s) - \mathbf{Z}_s\boldsymbol{p}_{x+1}(s)),\ x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Z}_s = \boldsymbol{q}_-(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}$;
для $\bar{\xi}(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \boldsymbol{p}^-(s)[z\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s]^{-1}z,$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{p}^-(s)\mathbf{Q}_s^{-x},\ x \in \mathbb{Z}^-,$$

$$\boldsymbol{p}^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s);$$

для $\xi^+(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}_+(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 - [\mathbf{g}(s,z)]_+ z^{-1}\mathbf{Q}_s)(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\boldsymbol{p}_x(s) - \boldsymbol{p}_{x+1}(s)\boldsymbol{Q}_s)(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Q}_s = \boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{q}^-(s)$.

Література

1. Боровков А.А., Рогозин Б.А. *Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий* // Теория вероятн. и её примен. — 1984. — Т.9, №3. — С. 401–430.
2. Гусак Д.В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. — 320 с.
3. Гусак Д.В. Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. — 60 с. (Препринт 78. II.)

4. Гусак Д.В., Турениязова А.И. *Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова* // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей: Сб.науч.тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1967. — С. 21–27.

5. Гусак Д.В., Турениязова А.И. *О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова* // Укр. мат. журн. — 1987. — Т.39, №6. — С. 707–711.

6. Ежов И.И., Скороход А.В. *Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I* // Теория вероятн. и её примен. — 1969. — Т.14, №1, №4.

7. Карнаух Є.В. Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова: Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук. — Київ, 2007, 18с.

8. Keilson J., Wishart D.M. *A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **60**, 3 (1964), 547–567.

9. Miller H.D. *A matrix factorization problem in the theory of random variables defined on a finite central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain. Absorption probabilities for sums of rahdom variables defined on a finite Markov chain*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), 268–298.

Ужгородський національний університет,
Ужгород, Україна
e-mail: *miroslava.gerich@yandex.ru*

Надійшло 19.03.2012

Gerich M. *Clarification of basic factorization identity is for the almost semi-continuous latticed Poisson processes on the Markov chain*, Carpathian Mathematical Publications, 4, 2 (2012), 229–240.

Let $\{\xi(t), x(t)\}$ be a homogeneous semi-continuous lattice Poisson process on the Markov chain. The jumps of one sign are geometrically distributed, and jumps of the opposite sign are arbitrary latticed distribution. For a such processes the relations for the components of two-sided matrix factorization are established. This relations define the moment genereting functions for extremumf of the process and their complements.

Герич М.С. *Уточнение основного факторизационного тождеста для почти полунепрерывных решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 229–240.

Пусть $\{\xi(t), x(t)\}$ — почти полунепрерывный решетчатый однородный пуассоновский процесс на цепи Маркова. Скачки одного знака для $\xi(t)$ геометрически распределены, противоположного знака — имеют произвольное решетчатое распределение. Для таких процессов установленны соотношения для компонент двусторонней матричной факторизации. Эти соотношения определяют генератрисы экстремумов процесса и их дополнений.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

ДМИТРИШИН М.І.

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ АБСТРАКТНИХ ПРОСТОРІВ БЄСОВА

Дмитришин М.І. *Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 241–246.

Доведено інтерполяційну теорему для тензорних добутків абстрактних просторів Бєсова, асоційованих з замкненими операторами в банахових просторах, та показано її застосування до проблеми апроксимацій елементів тензорних добутків банахових просторів.

Вступ

У праці [3], користуючись векторами експоненціального типу (див. [4]) замкненого лінійного оператора в банаховому просторі, визначено і досліджено поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова, асоційованого з довільним таким оператором. Показано застосування абстрактного простору Бєсова до проблеми апроксимацій елементів банахового простору векторами експоненціального типу заданого замкненого оператора. У цьому зв'язку слід відзначити також праці [2, 5].

У даній статті показано, що тензорний добуток абстрактних просторів Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу.

1 Означення і попередні відомості

Нехай $\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\}_{j=1}^J$ — скінченний набір банахових просторів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j^J \mathfrak{X}_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.
Ключові слова і фрази: тензорні добутки, абстрактні простори Бєсова, інтерполяційні простори.

де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^{N} \otimes_j^J x_n^j$ із скінченним N, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j^J x_n^j \equiv x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathfrak{X}_J$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$, $j = 1, \ldots, J$, розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо банахові простори цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \equiv \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j}}{\nu_j^{k p_j}} \right)^{1/p_j} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j) \equiv \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}}{\nu_j^k} < \infty \right\}.$$

Розглянемо об'єднання $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j > 0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \|x\|_{\mathfrak{X}_j} + \inf\{\nu_j > 0 : x \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\},$$

і побудуємо тензорний добуток $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j) \equiv \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^{N} |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Для $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$, використовуючи позначення праці [6], визначимо інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} \mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

де $\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) = \inf_{w=u+v} \left(|u|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t\, \|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j} \right)$, $u \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j$.

Для чисел $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори між квазінормованим підпростором $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і банаховим простором $\mathfrak{X}_j$

$$\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j) = \left\{ x \in \mathfrak{X}_j : \ |x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} < \infty \right\},$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\infty} \left(t^{\alpha} E_{p_j}(t, x) \right)^{\tau_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau_j} & : \ 0 < \tau_j < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\alpha} E_{p_j}(t, x) & : \ \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t, x) = \inf_{|a|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|x - a\|_{\mathfrak{X}_j}$, $a \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $x \in \mathfrak{X}_j$. Простір $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)$ назвемо *абстрактним простором Бєсова* [3].

Нехай $0 < \theta < 1$ і $[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ позначає простір $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)$, наділений квазінормою $|x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)}^{\theta}$, а $\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ — тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^{N} |x_n^1|_{\mathcal{B}_{p_1,\tau_1}^{\alpha}(A_1)}^{\theta} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{B}_{p_J,\tau_J}^{\alpha}(A_J)}^{\theta},$$

$\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ — поповнення простору $\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ у цій квазінормі.

2 Основні результати

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p_j, q, q_j, \tau_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{\alpha + 1}$ *і* $\dfrac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^{J} \left(\dfrac{1}{q_j} - 1 \right)$ *виконується така рівність*

$$\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j \right)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}. \tag{1}$$

Доведення. Покажемо, що

$$\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j \right)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J \left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j \right)_{\theta,q_j}, \tag{2}$$

де $\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j \right)_{\theta,q_j}$ — інтерполяційний простір з квазінормою

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j) \right]^{q_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_j},$$

$\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j) = \inf_{x = x_0 + x_1} \left(|x_0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t\, \|x_1\|_{\mathfrak{X}_j} \right)$, $x_0 \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $x_1 \in \mathfrak{X}_j$.

Дійсно, оскільки

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j) &= \inf_{w=u+v} \left(|u|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t\, \|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j} \right) \\
&= \inf_{\sum_n \otimes_j^J x_n^j = \sum_n \otimes_j^J u_n^j + \sum_n \otimes_j^J v_n^j} \left(\inf_{u = \sum_n \otimes_j^J u_n^j} \sum_{n=1}^{N} |u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)} \right. \\
&\left. + t \inf_{v = \sum_n \otimes_j^J v_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|v_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|v_n^J\|_{\mathfrak{X}_J} \right) \\
&\le \inf_{\sum_n \otimes_j^J x_n^j = \sum_n \otimes_j^J u_n^j + \sum_n \otimes_j^J v_n^j} \left(\sum_{n=1}^{N} |u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}} \cdot \ldots \cdot |u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}} + t \sum_{n=1}^{N} \|v_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|v_n^J\|_{\mathfrak{X}_J} \right) \\
&\le \sum_{n=1}^{N} \inf_{x_n^1 = u_n^1 + v_n^1} \left(|u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} + \tau \|v_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \right) \cdot \ldots \cdot \inf_{x_n^J = u_n^J + v_n^J} \left(|u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)} + \tau \|v_n^J\|_{\mathfrak{X}_J} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathcal{K}(\tau, x_n^1; \mathcal{E}_{p_1}(A_1), \mathfrak{X}_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{K}(\tau, x_n^J; \mathcal{E}_{p_J}(A_J), \mathfrak{X}_J), \quad \tau^J = t,
\end{aligned}$$

то, використовуючи нерівність Юнга, маємо

$$\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\right]^q\frac{dt}{t} \le J\sum_{n=1}^N\int_0^\infty \left[\tau^{-\theta J}\mathcal{K}(\tau,x_n^1;\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)\cdot\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\cdot\mathcal{K}(\tau,x_n^J;\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J)\right]^q\frac{d\tau}{\tau} \le J\sum_{n=1}^N\Big(\int_0^\infty\left[\tau^{-\theta}\mathcal{K}(\tau,x_n^1;\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)\right]^{q_1}\frac{d\tau}{\tau}\Big)^{q/q_1}\ldots$$

$$\ldots\Big(\int_0^\infty\left[\tau^{-\theta}\mathcal{K}(\tau,x_n^J;\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J)\right]^{q_J}\frac{d\tau}{\tau}\Big)^{q/q_J},\quad \frac{1}{q}-1=\sum_{j=1}^J\Big(\frac{1}{q_j}-1\Big).$$

Тому

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le J\inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1\right)_{\theta,q_1}}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J\right)_{\theta,q_J}},$$

тобто

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le J|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}},$$

звідки випливає вкладення

$$\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}\subset\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}. \tag{3}$$

З іншого боку, використовуючи інтерполяційні нерівності

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} \le c_{\theta,q_j}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_j},\quad x\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j),$$

$$\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le c_{\theta,q}t^\theta|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}},\, w\in\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}, \tag{4}$$

та нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned}|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} &= \inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1\right)_{\theta,q_1}}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J\right)_{\theta,q_J}}\\
&\le \inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\sum_{n=1}^N c_{\theta,q_1}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot c_{\theta,q_J}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}\|x\|^\theta_{\mathfrak{X}_J}\\
&\le c'_{\theta,q_j}\inf_{w=\sum_n\otimes_j^J x_n^j}\Big(\sum_{n=1}^N|x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\cdot\ldots\cdot|x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}+\sum_{n=1}^N\|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot\|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}\Big)\\
&\le c''_{\theta,q_j}t^{-\theta}\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le C_{\theta,q}|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}\end{aligned}$$

для $w=\sum_{n=1}^N\otimes_j^J x_n^j\in\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}$ таких, що $x_n^j\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$. Оскільки простір $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ щільний в просторі $\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}$, то

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}\le C_{\theta,q}|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}$$

для всіх $w\in\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}$. Звідси отримуємо

$$\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}\subset\tilde{\otimes}_j^J\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}. \tag{5}$$

Із вкладень (3) і (5) випливає рівність (2).

Згідно з теоремою 7.1.7 з книги [1], справедливий наступний ізоморфізм квазінормованих просторів

$$\left[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)\right]^\theta=\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j},\quad |x|^\theta_{\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)}\sim|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}, \tag{6}$$

де $\tau_j=\theta q_j$ і $\theta=\dfrac{1}{\alpha+1}$. З рівностей (6) і (2) отримаємо рівність (1). □

Теорема 2. *Існують такі числа $c_1(\alpha,\tau_j)$, $c_2(\alpha,\tau_j)$, що виконуються нерівності*

$$E(t,w)\le c_1t^{-\alpha}|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta},\quad w\in\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta, \tag{7}$$

$$|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta}\le c_2|w|^\alpha_{\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j},\quad w\in\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tag{8}$$

де $E(t,w)=\inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\le t}\|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j}$, $u\in\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w\in\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.11.4(b) з книги [1], для деякого додатного числа c маємо $|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}\le c|w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j}$, $w\in\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$. З цієї нерівності та рівності (1) при $\alpha=(1-\theta)/\theta$ випливає існування такої константи $c_1>0$, що виконується нерівність (8).

З інтерполяційної нерівності (4) та рівності (1) випливає існування такої константи $c_0>0$, що

$$\mathcal{K}(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le c_0t^\theta|w|_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta},\quad w\in\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta.$$

Покладемо $\mathcal{K}_\infty(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)=\inf\limits_{w=u+v}\max\left\{|u|_{\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j)},t\|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j}\right\}$. Оскільки $\mathcal{K}_\infty\le\mathcal{K}$, то

$$\mathcal{K}_\infty(t,w;\tilde{\otimes}_j^J\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J\mathfrak{X}_j)\le c_0t^\theta|w|_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta},\quad w\in\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta. \tag{9}$$

Згідно з лемою 7.1.2 з [1], для кожного $t>0$ існує таке $s>0$, що $\mathcal{K}_\infty=s$ і $E(s+0,w)\le s/t\le E(s-0,w)$. Звідси та з нерівності (9) маємо

$$s^{1-\theta}[E(s,w)]^\theta\le c_0|w|_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta},\quad w\in\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta.$$

При $\alpha=(1-\theta)/\theta$ отримуємо $s^\alpha E(s,w)\le c_0^{\alpha+1}|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta}$, $w\in\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^\alpha_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta$. Покладаючи $c_1=c_0^{\alpha+1}$, отримуємо нерівність (7). □

Література

1. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир. 1980. — 264 с.
2. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т.47, №5. — С. 616–628.
3. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бесова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах* // Доп. НАН України. — 2007. — №12. — С. 16–22.
4. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа* // Докл. АН БССР. — 1983. — Т.27, №9. — С. 791–793.
5. Радзиевский Г.В. *Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени* // Мат. сб. — 1998. — Т.189, №4. — С. 83–124.
6. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 28.02.2012

Dmytryshyn M.I. *Tensor products of abstract Besov spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 241–246.

We prove the interpolation theorem for tensor products of abstract Besov spaces, associated with closed operators in Banach spaces and show its application to the problems of approximations of elements of tensor products of Banach spaces.

Дмитришин М.И. *Тензорные произведения абстрактных пространств Бесова* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 241–246.

Доказана интерполяционная теорема для тензорных произведений абстрактных пространств Бесова, ассоциируемых с замкнутыми операторами в банаховых пространствах, и показано ее применение к проблеме аппроксимаций элементов тензорных произведений банаховых пространств.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2 | Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.524

Дмитришин Р.І.

Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера

Дмитришин Р.І. *Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 247–260.

Побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено умови існування такого алгоритму.

Вступ

В аналітичній теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень — гіллястих ланцюгових дробів — вивчаються функціональні дроби, які використовуються для дослідження голоморфних і мероморфних функцій. При побудові таких дробів, як один із методів, використовують принцип відповідності [12, с. 148–160]. У результаті отримано різні типи функціональних неперервних дробів (див. [12, с. 220–283]) та їх узагальнення [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 7, 8, 11, 13, 14]. Одним із таких узагальнень є багатовимірні g-дроби з нерівнозначними змінними [2, 3, 4, 7, 9, 10]. У даній статті побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (ФКСР) у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, який є багатовимірним узагальненням g-алгоритму Бауера [6], і встановлено необхідні та достатні умови його існування.

1 Відповідність

Нехай $P_{m_n}(\mathbf{z})$, $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ — багаточлени степенів m_n і l_n відповідно, $n \geq 1$, де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, причому $Q_{l_n}(\mathbf{0}) \neq 0$. Раціональна функція

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{P_{m_n}(\mathbf{z})}{Q_{l_n}(\mathbf{z})}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 65D15, 11J70.
Ключові слова і фрази: багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, відповідність, кратний степеневий ряд, багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера.

називається відповідною деякому ФКСР

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)}, \tag{1}$$

де $m(N) = m_1, m_2, \dots, m_N$ — мультиіндекс, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq N$, $0(N) = 0, 0, \dots, 0$, $|m(N)| = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, $s_{m(N)} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{z}^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{m_N}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $f_n(\mathbf{z})$ у ФКСР збігається з $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними багаточленами до степеня $\nu_n - 1$ включно. Послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є відповідною ряду (1), якщо

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty.$$

Задамо множину мультиіндексів

$$\mathcal{M} = \{m(N) : \ m(N) = m_1, m_2, \dots, m_N, \ m_p \in \mathbb{Z}_+, \ 1 \leq p \leq N\},$$

на якій визначимо покомпонентно арифметичні операції:

$$m(N) + n(N) = m_1 + n_1, m_2 + n_2, \dots, m_N + n_N, \quad \text{для всіх} \quad m(N), n(N) \in \mathcal{M};$$

$$km(N) = km_1, km_2, \dots, km_N, \quad \text{для всіх} \quad m(N) \in \mathcal{M} \quad \text{і для всіх} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Розглянемо багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}} = \cfrac{s_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{g_{i(2)}(1 - g_{i(1)}) z_{i_2}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{g_{i(3)}(1 - g_{i(2)}) z_{i_3}}{1 + \ddots}}}}, \tag{2}$$

де $s_0 > 0$, $i(k) = i_1, i_2, \dots, i_k$ — мультиіндекс, $0 < g_{i(k)} < 1$, $k \geq 1$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, $1 \leq n \leq k$, $i_0 = N$, $g_{i(0)} = 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Нехай $e_r = \delta_{r,1}, \delta_{r,2}, \dots, \delta_{r,N}$ — мультиіндекс, $\delta_{r,s}$ — символ Кронекера, $1 \leq r, s \leq N$. Задамо множини мультиіндексів

$$\mathcal{I} = \{i(k) : \ i(k) = i_1, i_2, \dots, i_k, \ 1 \leq i_p \leq i_{p-1}, \ 1 \leq p \leq k, \ k \geq 1, \ i_0 = N\},$$

$$\mathcal{I}^* = \{\vec{i}_k^* : \ \vec{i}_k^* = e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_k}, \ i(k) \in \mathcal{I}\}$$

і відображення $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^*$, таке, що $\varphi(i(k)) = \vec{i}_k^*$ для кожного $i(k) \in \mathcal{I}$ (можна показати, що відображення φ є бієктивне). Покладемо $g_{i(k)} = q_{\vec{i}_k^*}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\vec{i}_k^* \in \mathcal{I}^*$, і $g_{i(0)} = q_{\vec{i}_0^*}$, де $\vec{i}_0^* = e_0 = 0, 0, \dots, 0$. Тоді дріб (2) запишемо у вигляді

$$\frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}, \tag{3}$$

де $s_0 > 0$, $q_{\vec{i}_0^*} = 0$, $0 < q_{\vec{i}_k^*} < 1$, $\vec{i}_k^* \in \mathcal{I}^*$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Відповідність дробу (3) до ряду (1) означає, що розвинення кожного його n-го підхідного дробу

$$g_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}$$

у ФКСР збігається з даним рядом за всіма однорідними багаточленами до степеня $n - 1$ включно, тобто $\nu_n = n$, $n \geq 1$.

2 Алгоритм

Побудуємо та дослідимо алгоритм розвинення ФКСР (1) у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3).

Нехай $s_{0(N)} > 0$ і

$$R_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} \mathbf{z}^{m(N)}.$$

Позначимо через

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s^{e_0}_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} \tag{4}$$

ряд, обернений до кратного степеневого ряду $R_{e_0}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти ряду (4) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$s^{e_0}_{m(N)} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} s^{e_0}_{m(N)-r(N)} \frac{s_{r(N)}}{s_{0(N)}}, \quad m_j \geq 0, \ 1 \leq j \leq N, \ |m(N)| \geq 1, \tag{5}$$

де $s^{e_0}_{0(N)} = 1$, причому $s^{e_0}_{n(N)} = 0$, якщо існує індекс j, $1 \leq j \leq N$, такий, що $n_j < 0$.

Ряд (4) за умов, що $s^{e_0}_{e_j} \neq 0$, $2 \leq j \leq N$, запишемо у вигляді

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = P_{e_1}(z_1) - \sum_{j=2}^{N} s^{e_0}_{e_j} z_j R_{e_j}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_1}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_j=0,\ 2\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_1} s^{e_0}_{m(N)} z_1^{m_1}, \quad R_{e_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|r(N)|\geq 0 \\ r_i=0,\ j+1\leq i\leq N}} (-1)^{|r(N)|} \frac{s^{e_0}_{e_j+r(N)}}{s^{e_0}_{e_j}} \mathbf{z}^{r(N)}.$$

Тоді

$$L(\mathbf{z}) = \frac{s_{0(N)}}{P_{e_1}(z_1) - \sum\limits_{j=2}^{N} s^{e_0}_{e_j} z_j R_{e_j}(\mathbf{z})}.$$

Послідовність

$$s_n = \int_0^1 u^n d\varphi(u), \quad n \geq 0,$$

де $\varphi(u)$ — дійсна і монотонно неспадна функція з нескінченним числом точок росту, називається цілком монотонною відповідною нескінченному розподілу мас, якщо

$$\Delta^m s_n \geq 0, \quad m \geq 0,\ n \geq 0,$$

де

$$\Delta^m s_n = s_n - \binom{1}{m} s_{n+1} + \binom{2}{m} s_{n+2} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} s_{n+m} \text{ [17]}.$$

Нехай $\{s_{m(N)}\}_{m_1=0}^{\infty}$, $m_j = 0$, $2 \leq j \leq N$, — цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ такі, що $0 < q_{\vec{i}_k^*} < 1$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} z_1^{m_1} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1}\right)^{-1},$$

де символ "$\sim$" означає відповідність між рядом і дробом, $q_{\vec{i}_0^*} = 0$. Звідси

$$P_{e_1}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1},$$

оскільки ряд $P_{e_1}(z_1)$ обернений до ряду

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} z_1^{m_1}.$$

Коефіцієнти неперервного g-дробу, відповідного формальному степеневому ряду, можна обчислити, використовуючи g-алгоритм Бауера [6]. Згідно з цим алгоритмом $q_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ є діагональними елементами $q_{\vec{i}_k^*}^{(0)}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ g-таблиці при $h = 0$

$$\begin{array}{ccccc}
 & q^{(0)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & & & \\
q^{(1)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(0)}_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} & & \\
 & q^{(1)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(0)}_{\vec{i}_3^*+\vec{j}_h^*} & \\
q^{(2)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(1)}_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} & \vdots & \ddots \\
\vdots & q^{(2)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & \vdots & & \\
 & \vdots & & &
\end{array} \tag{6}$$

елементи якої визначаються за такими рекурентними співвідношеннями (правилами ромба)

$$\left.\begin{array}{l}
(1-q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*})(1-q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+2}^*+\vec{j}_h^*}) = (1-q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*})(1-q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*}), \quad r \geq 0,\ n \geq 0,\\
q^{(n)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*} q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*} = q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r-1}^*+\vec{j}_h^*} q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*}, \quad r \geq 1,\ n \geq 0,
\end{array}\right\} \tag{7}$$

з початковими умовами

$$q^{(n)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*} = 0, \quad q^{(n)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} = \frac{s^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}_{m(N)+e_{i_1}+e_{j_h}}}{s^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}_{m(N)+e_{j_h}}}, \quad |m(N)| = m_{i_1} = n,\ \ n \geq 0, \tag{8}$$

причому

$$q^{(n)}_{\vec{i}_1^*} = \frac{s_{m(N)+e_{i_1}}}{s_{m(N)}}, \quad |m(N)| = m_{i_1} = n,\ n \geq 0.$$

Таким чином, можемо записати

$$L(\mathbf{z}) \sim \frac{s_{0(N)}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1} - \sum\limits_{j=2}^{N} s^{e_0}_{e_j} z_j R_{e_j}(\mathbf{z})},$$

де $q_{\vec{i}_0^*} = 0$.

Нехай l — довільне натуральне число, $2 \leq l \leq N$, і нехай

$$\{s_{m(N)}\}_{m_l=0}^{\infty}, \quad m_j = 0,\ j \neq l,\ 1 \leq j \leq N$$

— цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді, згідно з теоремою 4.1 [17], існують дійсні числа $q'_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = l$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ такі, що $0 < q'_{\vec{i}_k^*} < 1$, $i_p = l$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$, і

$$\sum_{\substack{m_l=0\\ m_j=0,\ j\neq l,\ 1\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_l} s_{m(N)} z_l^{m_l} \sim s_{0(N)} \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=l,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*}(1-g'_{\vec{i}_{k-1}^*})z_l}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}_0^*} = 0$. Коефіцієнти $q'_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = l$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = l$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8) при $h = 0$.

Оскільки

$$-s^{e_0}_{m(N)} = \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} = q'_{\vec{i}_1^*}, \quad m_l = 1,\ m_j = 0,\ j \neq l,\ 1 \leq j \leq N,\ i_1 = l,$$

то покладемо $q_{\vec{i}_1^*} = q'_{\vec{i}_1^*}$.

Таким чином, можемо записати, що

$$L(\mathbf{z}) \sim \frac{s_{0(N)}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1} + \sum\limits_{j_1=2}^{N} q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1} R_{\vec{j}_1^*}(\mathbf{z})},$$

де $q_{\vec{i}_0^*} = 0$.

Нехай l — довільне натуральне число, $2 \leq l \leq N$. Позначимо через

$$R'_{e_l}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|m(N)|\geq 0\\ m_i=0,\ l+1\leq i\leq N}} (-1)^{|m(N)|} s^{e_l}_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} \tag{9}$$

ряд, обернений до ряду $R_{e_l}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти ряду (9) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул при $m_i = 0,\ j_h + 1 \le i \le N,\ |m(N)| \ge 1$, і $\vec{j}_h^* = e_l$

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} s_{m(N)-r(N)}^{\vec{j}_h^*} \frac{s_{r(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}}, \tag{10}$$

де $s_{0(N)}^{\vec{j}_h^*} = 1$, причому $s_{n(N)}^{\vec{j}_h^*} = 0$, якщо існує індекс p, $1 \le p \le N$ такий, що $n_p < 0$.

Ряд (9) за умов, що $s_{e_j}^{e_l} \ne 0$, $2 \le j \le l$ запишемо у вигляді

$$R'_{e_l}(\mathbf{z}) = P_{e_l+e_1}(z_1) - \sum_{j=2}^{l} s_{e_j}^{e_l} z_j R_{e_l+e_j}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_l+e_1}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} s_{m(N)}^{e_l} z_1^{m_1}, \quad R_{e_l+e_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|r(N)|\ge 0\\ r_i=0,\ j+1\le i\le N}} (-1)^{|r(N)|} \frac{s_{e_j+r(N)}^{e_l}}{s_{e_j}^{e_l}} \mathbf{z}^{r(N)}.$$

Тоді $R_{e_l}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$R_{e_l}(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_{e_l+e_1}(z_1) - \sum\limits_{j=2}^{l} s_{e_j}^{e_l} z_j R_{e_l+e_j}(\mathbf{z})}.$$

Нехай $\{s_{m(N)+e_l}^{e_0}\}_{m_1=0}^{\infty}$, $m_j = 0$, $2 \le j \le N$ — цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ такі, що $0 < q'_{\vec{i}_k^*+e_l} < 1$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)+e_l}^{e_0}}{s_{e_l}^{e_0}} z_1^{m_1} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})z_1}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}_0^*+e_l} = 0$.

Оскільки ряд $P_{e_l+e_1}(z_1)$ обернений до ряду

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)+e_l}^{e_0}}{s_{e_l}^{e_0}} z_1^{m_1},$$

то

$$P_{e_l+e_1}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})z_1}{1},$$

де $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, є діагональні елементи $q_{\vec{i}_k^*+e_l}^{(0)}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8), при $\vec{j}_h^* = e_l$.

Послідовність $\{a_n\}$ називається ланцюговою, якщо існують дійсні числа g_n, $n \ge 0$ такі, що

$$0 \le g_{n-1} \le 1, \quad a_n = g_n(1 - g_{n-1}), \quad n \ge 1.$$

Числа g_n, $n \ge 0$ називаються параметрами ланцюгової послідовності $\{a_n\}$ [16, с. 79–86].

Для кожної ланцюгової послідовності $\{a_n\}$ існують мінімальні m_n, $n \ge 0$ і максимальні M_n, $n \ge 0$ параметри такі, що

$$a_n = m_n(1 - m_{n-1}), \quad a_n = M_n(1 - M_{n-1}), \quad n \ge 1,$$

і $m_n \le g_n \le M_n$, $n \ge 0$, для будь-якої іншої послідовності параметрів $\{g_n\}$ послідовності $\{a_n\}$. Мінімальні і максимальні параметри обчислюються відповідно за формулами

$$m_0 = 0, \quad m_{p+1} = \begin{cases} 0, & m_p = 1, \\ \dfrac{a_{p+1}}{1 - m_p}, & m_p < 1, \end{cases} \qquad M_p = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=p+1}^{\infty} \frac{-a_r}{1}, \quad p \ge 0,$$

причому, якщо існує індекс $n + k$ такий, що $a_{n+k} = 0$, $k \ge 0$, то

$$M_n = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=n+1}^{n+k-1} \frac{-a_r}{1}.$$

Нехай $0 < q_{e_l} \le M_{e_l}^{(1)} < 1$, де

$$M_{e_l}^{(1)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})}{1}, \quad q'_{\vec{i}_0^*+e_l} = 0,$$

тоді

$$P_{e_l}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})z_1}{1},$$

де коефіцієнти неперервного дробу визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (див. [15]) при $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, і $\vec{j}_h^* = e_l$

$$q_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} = \frac{q'_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*}}{1 - q_{\vec{j}_h^*}} = \frac{-s_{e_{i_1}}^{\vec{j}_h^*}}{1 + s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}} = \frac{s_{e_{i_1}+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}(1 + s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}})}, \tag{11}$$

$$q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*} = q'_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}\left(1 - \frac{\dfrac{q'_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} q'_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} \cdot \ldots \cdot q'_{\vec{i}_{k-1}^*+\vec{j}_h^*}}{(1 - q'_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*})(1 - q'_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*}) \cdot \ldots \cdot (1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+\vec{j}_h^*})}}{\dfrac{1 - q_{\vec{j}_h^*}}{-q_{\vec{j}_h^*}} + \sum\limits_{p=1}^{k-1} \dfrac{q'_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} q'_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} \cdot \ldots \cdot q'_{\vec{i}_p^*+\vec{j}_h^*}}{(1 - q'_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*})(1 - q'_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*}) \cdot \ldots \cdot (1 - q'_{\vec{i}_p^*+\vec{j}_h^*})}}\right), \quad k \ge 2. \tag{12}$$

Нехай t — довільне натуральне число, $2 \le t \le l - 1$ і нехай

$$\{s_{m(N)+e_l}^{e_0}\}_{m_t=0}^{\infty}, \quad m_j = 0,\ j \ne t,\ 1 \le j \le N$$

— цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q'_{\vec{i}^*_k+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ такі, що $0 < q'_{\vec{i}^*_k+e_l} < 1$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і

$$\sum_{\substack{m_t=0\\ m_j=0,\, j\neq t,\, 1\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_t} \frac{s^{e_0}_{m(N)+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}} z_t^{m_t} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\, 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}^*_k+e_l}(1-g'_{\vec{i}^*_{k-1}+e_l})z_l}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}^*_0+e_l} = 0$. Коефіцієнти $q'_{\vec{i}^*_k+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}^*_k+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8) при $\vec{j}^*_h = e_l$.

Нехай $0 < q_{e_l} \le M^{(t)}_{e_l} < 1$, де

$$M^{(t)}_{e_l} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\, 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}^*_k+e_l}(1-q'_{\vec{i}^*_{k-1}+e_l})}{1}, \quad q'_{\vec{i}^*_0+e_l} = 0.$$

Тоді

$$\sum_{\substack{m_t=0\\ m_j=0,\, j\neq t,\, 1\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_t} \frac{s^{e_0}_{m(N)+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}} z_t^{m_t} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\, 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}^*_k+e_l}(1-q_{\vec{i}^*_{k-1}+e_l})z_1}{1}\right)^{-1},$$

де коефіцієнти неперервного дробу визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (11), (12) при $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, і $\vec{j}^*_h = e_l$.

Оскільки

$$\frac{-s^{e_l}_{e_t}}{1-q_{e_l}} = \frac{s^{e_0}_{e_l+e_t}}{s^{e_0}_{e_l}(1+s^{e_0}_{e_l})} = \frac{s_{0(N)}s_{e_l+e_t} - s^2_{e_l}}{s_{e_l}(s_{0(N)}-s_{e_l})} = q'_{e_l+e_t},$$

$$\frac{-s^{e_l}_{e_l}}{1-q_{e_l}} = \frac{s^{e_0}_{e_l+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}(1+s^{e_0}_{e_l})} = \frac{s_{0(N)}s_{e_l+e_l} - s^2_{e_l}}{s_{e_l}(s_{0(N)}-s_{e_l})} = q'_{2e_l},$$

то покладемо $q_{e_l+e_t} = q'_{e_l+e_t}$ і $q_{2e_l} = q'_{2e_l}$.

Таким чином, можемо записати

$$L(\mathbf{z}) \sim \cfrac{s_{0(N)}}{Q_{\vec{j}^*_0}(z_1) + \sum\limits_{j_1=2}^{N} \cfrac{q_{\vec{j}^*_1} z_{j_1}}{Q_{\vec{j}^*_1}(z_1) + \sum\limits_{j_2=2}^{j_1} q_{\vec{j}^*_2}(1-q_{\vec{j}^*_1})z_{j_2}R_{\vec{j}^*_2}(\mathbf{z})}},$$

де

$$Q_{\vec{j}^*_h}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\, 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}^*_k+\vec{j}^*_h}(1-q_{\vec{i}^*_{k-1}+\vec{j}^*_h})z_1}{1}, \quad h \ge 0,\ n \ge 0,$$

причому $q_{\vec{i}^*_0} = 0$ і $j_r \ne 1$, $1 \le r \le h$, $\vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$, якщо $h \ge 1$.

Обчислюючи далі коефіцієнти

$$s^{\vec{j}^*_h}_{m(N)}, \quad m_i = 0,\ j_h+1 \le i \le N,\ |m(N)| \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*,$$

за допомогою рекурентних формул (10) і продовжуючи процес ітерації, за умов, що

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p, i \le N,$$

$$\{s^{e_0}_{m(N)+e_r}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p \le r-1,\ 2 \le r \le N,\ 1 \le i \le N,$$

$$\{s^{\vec{j}^*_h}_{m(N)+e_{j_h}}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p \le j_h-1,\ 1 \le i \le N,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

— цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас та

$$s_{0(N)} > 0, \quad s^{\vec{j}^*_h}_{e_{n+1}} \ne 0, \quad 1 \le n \le j_h-1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*, \tag{13}$$

$$0 < q_{\vec{j}^*_h} \le M^{(n)}_{\vec{j}^*_h} < 1, \quad 1 \le n \le j_h-1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*, \tag{14}$$

де

$$M^{(n)}_{\vec{j}^*_h} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=n,\, 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}^*_k+\vec{j}^*_h}(1-q'_{\vec{i}^*_{k-1}+\vec{j}^*_h})}{1}, \quad q'_{\vec{i}^*_0+\vec{j}^*_h} = 0,$$

$$q'_{\vec{i}^*_k+\vec{j}^*_h}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h-1,\ k \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{J}^*$$

є діагональними елементами

$$q^{(0)}_{\vec{i}^*_k+\vec{j}^*_h}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h-1,\ k \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{J}^*$$

g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8), для ряду (1) отримаємо дріб (3), де $s_0 = s_{0(N)}$, $q_{\vec{i}^*_k}$, $i_p = n$, $1 \le p \le k$, $1 \le n \le N$, $k \ge 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}^*_k}$, $i_p = n$, $1 \le p \le k$, $1 \le n \le N$, $k \ge 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами(8), при $h = 0$,

$$q_{\vec{i}^*_1+\vec{j}^*_h}, \quad 1 \le i_1 \le j_h-1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*,$$

$$q_{\vec{i}^*_k+\vec{j}^*_h}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h-1,\ k \ge 2,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за допомогою формул (11) і (12) відповідно.

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів дробу (3), якщо задані коефіцієнти ряду (1), який є багатовимірним узагальненням g-алгоритму Бауера [6].

Покажемо, що побудований багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3) є відповідним ФКСР (1). Використовуючи співвідношення (7), (8) і (11), згортатимемо $g_n(\mathbf{z})$ при $n \ge 1$.

При $n = 1$ маємо $g_1(\mathbf{z}) = s_0$. Оскільки

$$s_0 - \sum_{|m(N)|\ge 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \sum_{|m(N)|\ge 1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)},$$

то $g_1(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто порядок відповідності $\nu_1 = 1$.

При $n = 2$ можемо записати

$$g_2(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{1 + \sum\limits_{j_1=1}^{N} q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}} = \frac{s_0}{1 - \sum\limits_{j_1=1}^{N} s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}} = \sum_{|m(N)|=0}^{1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2),$$

де $\mathrm{O}(\mathbf{z}^p)$ — символічний запис деякого ФКСР найменший степінь однорідних багаточленів якого не менший ніж p, $p \geq 2$. Оскільки,

$$\sum_{|m(N)|=0}^{1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2) - \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \mathrm{O}'(\mathbf{z}^2),$$

де $\mathrm{O}'(\mathbf{z}^p)$ — символічний запис деякого ФКСР найменший степінь однорідних багаточленів якого не менший ніж p, $p \geq 2$, то $g_2(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_2 = 2$.

Згідно описаного вище узагальненого алгоритму Бауера дріб $Q_{\vec{j}_h^*}(z_1)$ є відповідним ряду $P_{\vec{j}_h^*+e_1}(z_1)$, при $h \geq 0$, причому $j_r \neq 1$, $1 \leq r \leq h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$, якщо $h \geq 1$. Порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Тому, при $n \geq 3$ і $0 \leq h \leq n - 3$ дріб

$$Q_{\vec{j}_h^*}^{(n-h-1)}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1 \\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{n-h-1} \frac{q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*+\vec{j}_h^*}) z_1}{1}$$

має розвинення в формальний степеневий ряд

$$L_{\vec{j}_h^*}^{(n-h-1)}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_i=0,\ 2\leq i\leq N}}^{n-h-1} (-1)^{m_1} s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*} z_1^{m_1} + \mathrm{O}(z_1^{n-h}),$$

де $\mathrm{O}(z_1^p)$ — символічний запис деякого формального степеневого ряду найменший степінь багаточленів якого не менший ніж p, $p \geq 3$.

Тоді при $n = 3$ маємо

$$g_3(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{Q_{\vec{j}_0^*}^{(2)}(z_1) + \sum\limits_{j_1=2}^{N} \dfrac{q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}}{1 + \sum\limits_{j_2=1}^{j_1} q_{\vec{j}_2^*}(1 - q_{\vec{j}_1^*}) z_{j_2}}} = \frac{s_0}{L_{e_0}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} \dfrac{s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}}{1 - \sum\limits_{j_2=1}^{j_1} s_{e_{j_2}}^{e_{j_1}} z_{j_2}}}$$

$$= \frac{s_0}{L_{e_0}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1} P_{\vec{j}_1^*}^{(2)}} = \sum_{|m(N)|=0}^{2} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^3),$$

де

$$P_{\vec{j}_h^*}^{(n)} = \sum_{\substack{|m(N)|=0 \\ m_i=0,\ j_h+1\leq i\leq N}}^{n-1} (-1)^{|m(N)|} \frac{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_{h-1}^*}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_{h-1}^*}} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^n), \quad j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,\ n \geq 2.$$

Оскільки

$$\sum_{|m(N)|=0}^{2} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^3) - \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \mathrm{O}'(\mathbf{z}^3),$$

то $g_3(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_3 = 3$.

Далі, нехай n — довільне натуральне число, $n \geq 4$. Тоді

$$g_n(\mathbf{z}) = \cfrac{s_0}{Q_{\vec{j}_0^*}^{(n-1)}(z_1) + \sum\limits_{j_1=2}^{N} \cfrac{q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}}{Q_{\vec{j}_1^*}^{(n-2)}(z_1) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=2}^{n-1} \sum\limits_{j_r=2}^{j_{r-1}} \cfrac{q_{\vec{j}_r^*}(1 - q_{\vec{j}_{r-1}^*}) z_{j_r}}{Q_{\vec{j}_r^*}^{(n-r-1)}(z_1)}}}$$

$$= \cfrac{s_0}{L_{e_0}^{(n-1)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} \cfrac{s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}}{L_{e_{j_1}}^{(n-2)}(z_1) - \ddots - \sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}} \cfrac{s_{e_{j_{n-3}}}^{\vec{j}_{n-4}^*} z_{j_{n-3}}}{L_{\vec{j}_{n-3}^*}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_{n-2}=2}^{j_{n-3}} \cfrac{s_{e_{j_{n-2}}}^{\vec{j}_{n-3}^*} z_{j_{n-2}}}{1 - \sum\limits_{j_{n-1}=1}^{j_{n-2}} s_{e_{j_{n-1}}}^{\vec{j}_{n-2}^*} z_{j_{n-1}}}}}}$$

$$= \cfrac{s_0}{L_{e_0}^{(n-1)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} \cfrac{s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}}{L_{e_{j_1}}^{(n-2)}(z_1) - \ddots - \sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}} \cfrac{s_{e_{j_{n-3}}}^{\vec{j}_{n-4}^*} z_{j_{n-3}}}{L_{\vec{j}_{n-3}^*}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_{n-2}=2}^{j_{n-3}} s_{e_{j_{n-2}}}^{\vec{j}_{n-3}^*} z_{j_{n-2}} P_{\vec{j}_{n-2}^*}^{(2)}}}}$$

$$= \cfrac{s_0}{L_{e_0}^{(n-1)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} \cfrac{s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}}{L_{e_{j_1}}^{(n-2)}(z_1) - \ddots - \sum\limits_{j_{n-4}=2}^{j_{n-5}} \cfrac{s_{e_{j_{n-4}}}^{\vec{j}_{n-5}^*} z_{j_{n-4}}}{L_{\vec{j}_{n-4}^*}^{(3)}(z_1) - \sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}} s_{e_{j_{n-3}}}^{\vec{j}_{n-4}^*} z_{j_{n-3}} P_{\vec{j}_{n-3}^*}^{(3)}}}}.$$

Продовжуючи даний процес, на останньому кроці отримаємо

$$g_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{L_{e_0}^{(n-1)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1} P_{\vec{j}_1^*}^{(n-1)}} = \sum_{|m(N)|=0}^{n-1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^n).$$

Оскільки,

$$\sum_{|m(N)|=0}^{n-1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^n) - \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \mathrm{O}'(\mathbf{z}^n),$$

то $g_n(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_n = n$.

В силу довільності n робимо висновок, що $g_n(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, при $n \geq 1$. Порядок відповідності $\nu_n = n$. Це означає, що розвинення кожного його n-го підхідного дробу $g_n(\mathbf{z})$ у ФКСР збігається з рядом $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними багаточленами до степеня $n-1$ включно. Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty} \nu_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty,$$

то дріб (3) є відповідним ряду (1).

Таким чином, справджується теорема:

Теорема 1. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3) є відповідним заданому формальному кратному степеневому ряду (1) тоді і лише тоді, коли виконуються умови (13), (14) і*

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p, i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_r}^{e_0}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq r-1,\ 2 \leq r \leq N,\ 1 \leq i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq j_h - 1,\ 1 \leq i \leq N,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

є цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас, де коефіцієнти

$$s_{m(N)}^{e_0}, \quad m_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq N,\ |m(N)| \geq 1,$$

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*}, \quad m_i = 0,\ j_h + 1 \leq i \leq N,\ |m(N)| \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за формулами (5) і (10) відповідно.

Нехай $\{q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}(1 - q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*-e_{i_k}})\}_{k=1}^{\infty}$, $i_p = n$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq n \leq j_h - 1$, $k \geq 1$, $j_r \neq 1$, $1 \leq r \leq h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$, є ланцюговими послідовностями з відповідними послідовностями мінімальних параметрів

$$\{m'_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}\}_{k=0}^{\infty}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h.\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,$$

де $m'_{\vec{j}_h^*} = 0$, $j_r \neq 1$, $1 \leq r \leq h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$. Тоді, позначаючи

$$q_{\vec{i}_k^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq N,\ k \geq 1,$$

$$m'_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

через

$$m_{\vec{i}_k^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq N,\ k \geq 1,$$

$$m_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

відповідно, дріб (3) запишемо у вигляді

$$\cfrac{s_0}{1 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{m_{\vec{i}_1^*} z_{i_1}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{m_{\vec{i}_k^*}(1 - \delta_{i_k,i_{k-1}} m_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}}, \tag{15}$$

де $s_0 > 0$, $0 < m_{\vec{i}_k^*} < 1$, $\vec{i}_k^* \in \mathcal{I}^*$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $1 \leq i, j \leq N$.

За схемою доведення теореми 1, можна показати справедливість наступної теореми:

Теорема 2. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (15) є відповідним заданому формальному кратному степеневому ряду (1) тоді і лише тоді, коли виконуються умови (13) і*

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p, i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_r}^{e_0}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq r-1,\ 2 \leq r \leq N,\ 1 \leq i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq j_h - 1,\ 1 \leq i \leq N,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

є цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас, де коефіцієнти

$$s_{m(N)}^{e_0}, \quad m_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq N,\ |m(N)| \geq 1,$$

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*}, \quad m_i = 0,\ j_h + 1 \leq i \leq N,\ |m(N)| \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за формулами (5) і (10) відповідно.

З огляду на вище побудоване багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера коефіцієнти дробу (15), відповідного заданому ряду (1), можна обчислювати наступним чином: $s_0 = s_{0(N)}$; $m_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = n$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq n \leq N$, $k \geq 1$ є діагональними елементами $q_{\vec{i}_k^*}^{(0)}$, $i_p = n$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq n \leq N$, $k \geq 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами(8), при $h = 0$;

$$m_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

є діагональними елементами

$$q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}^{(0)}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8).

ЛІТЕРАТУРА

1. Боднар Д.І. *Багатовимірні С-дроби* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 3. — С. 39–66.
2. Боднар Д.І., Дмитришин Р.І. *Двовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера* // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.
3. Дмитришин Р.І. *Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Матем. — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.
4. Дмитришин Р.І. *Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 87–92.
5. Кучмінська Х.Й. *Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду* // Доп. АН УРСР. — 1978. — № 7. — С. 614–618.

6. Bauer F.L. *The g-algorithm*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **8**, 1 (1960), 1–17.
7. Dmytryshyn R.I. *On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables*, J. Math. Sc., **181**, 3 (2012), 320–327.
8. Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application*, J. Comp. & Appl. Math., **164–165**, (2004), 265–284.
9. Dmytryshyn R.I. *The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series* // Carpath. Math. Publ., **1**, 2 (2009), 145–151.
10. Dmytryshyn R.I. *The two-dimensional g-fraction with nonequivalent variables for double power series*, Proceedings of ICNAAM 2005. Rhodes, Greece, 2005, 15–18.
11. Cuyt A., Verdonk B. *A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations*, Appl. Numer. Math., **4**, (1988), 263–271.
12. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions: Analytic theory and applications, Addison-Wesley, Encycl. of Math. & its Appl., Vol. 11, London, Amsterdam, Don Mills, Ontario, Sydney, Tokyo, 1980.
13. Murphy J.F., O'Donohoe M.R. *A two-variable generalisation of the Stieltjes-type continued fractions*, J. Comp. & Appl. Math., **4**, 3, (1978), 181–190.
14. Siemaszko W. *Branched continued fractions for double power series*, J. Comp. & Appl. Math., **6**, 2 (1980), 121–125.
15. Runckel H.-J. *Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line*, J. reine angew. Math., **281** (1976), 97–125.
16. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions, Van Nostrand, New York, 1948.
17. Wall H.S. *Continued fractions and totally monotone sequences*, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 165–184.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 15.07.2012

Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of Bauer's g-algorithm*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 247–260.

The algorithm for the expansion of the given formal multiple power series into the corresponding multidimensional g-fraction with independent variables is constructed and the conditions of existence of such algorithm are established.

Дмитришин Р.И. *Многомерное обобщение g-алгоритма Бауера* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 247–260.

Построен алгоритм развития данного формального кратного степенного ряда в соответствующую многомерную g-дробь с неравнозначными переменными и установлены условия существования такого алгоритма.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.983

Звоздецький Т.І.

ПРО n-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛІВИХ ОБЕРНЕНИХ ДО n-ГО СТЕПЕНЯ ІНТЕГРУВАННЯ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Звоздецький Т.І. *Про n-еквівалентність лівих обернених до n-го степеня інтегрування операторів у просторах аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 261–267.

У даній роботі досліджуються умови n-еквівалентності n-го степеня оператора диференціювання та довільного оператора, який є лівим оберненим до n-го степеня оператора інтегрування, в просторах функцій, аналітичних у не $\frac{2\pi}{n}$-інваріантних областях.

Вступ

Нехай G – зіркова відносно нуля область комплексної площини. Позначимо через $\mathcal{A}(G)$ простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ – сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G)$. Нагадаємо, що оператори A та B з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ називаються еквівалентними в $\mathcal{A}(G)$, якщо для деякого ізоморфізму $T : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ виконується співвідношення $AT = TB$.

Означення. *Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ оператори A та B з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ називатимемо n-еквівалентними в $\mathcal{A}(G)$, якщо існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$, для якого $AT = TB$ і*

$$(Tf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{1}$$

Нехай $\mathcal{D}$ та $\mathcal{I}$ – оператори диференціювання та інтегрування, які на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(G)$ діють відповідно за правилами

$$(\mathcal{D}f)(z) = f'(z), \quad (\mathcal{I}f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47B38.
Ключові слова і фрази: оператор інтегрування, оператор диференціювання, n-еквівалентність операторів, простір аналітичних функцій.

Зафіксуємо число $n \in \mathbb{N}$ та функції $a_k \in \mathcal{A}(G)$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, і розглянемо оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$, який визначається рівністю

$$(Af)(z) = (\mathcal{D}^n f)(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)(\mathcal{D}^k f)(0), \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{2}$$

Відзначимо, що формула (2) задає загальний вигляд операторів із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$, які є лівими оберненими до $\mathcal{I}^n$.

У роботах [2] (для $n = 1$) та [1] (для $n \in \mathbb{N}$) встановлено, що оператори A та $\mathcal{D}^n$ еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$ (і навіть n-еквівалентні), якщо область G є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля (тобто $\omega G = G$, де $\omega = \exp\frac{2\pi i}{n}$). У даній роботі, використовуючи запропонований у [3] метод, досліджуються необхідні й достатні умови n-еквівалентності в $\mathcal{A}(G)$ операторів A та $\mathcal{D}^n$ у випадку, коли область G не є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля.

1 Допоміжні результати

Нехай $n \geq 2$, область G не $\frac{2\pi}{n}$-інваріантна відносно нуля і оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Тоді існує такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, який задовольняє рівність

$$AT = T\mathcal{D}^n \tag{3}$$

і для якого виконуються співвідношення (1).

Розглянемо деякий відкритий круг G_0 з центром у нулі, який міститься в G. Він є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною областю. Тому, згідно з [1], існує ізоморфізм T_1 простору $\mathcal{A}(G_0)$ на себе, який задовольняє рівності (3) і (1). Наступна формула задає цей ізоморфізм:

$$(T_1 f)(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)(P_k f)(t)\,dt, \quad f \in \mathcal{A}(G_0),$$

де для кожного $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ проектор P_k на функцію $f \in \mathcal{A}(G_0)$ діє за правилом

$$(P_k f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^j z).$$

Оскільки $\mathcal{A}(G) \subset \mathcal{A}(G_0)$ і топологія простору $\mathcal{A}(G)$ сильніша за топологію простору $\mathcal{A}(G_0)$, то оператори T і T_1 лінійно й неперервно відображають $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G_0)$. Але на елементах повної в $\mathcal{A}(G)$ системи $\{\exp(\lambda z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ оператори T і T_1 збігаються [1]. Тому для кожної функції $f \in \mathcal{A}(G)$ функції $T_1 f$ і Tf збігаються між собою в $\mathcal{A}(G_0)$, тобто функція $T_1 f \in \mathcal{A}(G_0)$ аналітично продовжується в область G. Тоді аналітично продовжується в G і функція

$$F_f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)(P_k f)(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk}(\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)\right) f(\omega^j t)\,dt. \tag{4}$$

Нехай $j_1, j_2, ..., j_s$ – всі такі числа $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, для яких $\omega^j G \neq G$. Зафіксуємо деяке число $\mu \in \{j_1, j_2, ..., j_s\}$. Відзначимо, що область $\omega^\mu G$ не може повністю міститися в G, інакше, враховуючи співвідношення $G \supseteq \omega^\mu G \supseteq \omega^{2\mu} G \supseteq ... \supseteq \omega^{n\mu} G = G$, отримали б, що $\omega^\mu G = G$. Тому в області $\omega^\mu G$ є точки, які не належать G. Позначимо одну з них через $\omega^\mu z_0$, де $z_0 \in G$.

Розглянемо функцію $f_0(z) = \dfrac{1}{z - \omega^\mu z_0}$ і деяку зіркову відносно нуля підобласть G_1 області G, яка охоплює круг G_0 і точку z_0, але не містить жодної з точок вигляду $\omega^j z_0$, де $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Зауважимо, що функція f_0 належить до $\mathcal{A}(G)$ і аналітично не продовжується в область $\omega^\mu G_1$ (а тому і в область $\omega^\mu G$). Оскільки відповідна їй функція F_{f_0} вигляду (4) аналітично продовжується в область G (а тому і в область G_1) і всі доданки зовнішньої суми з (4) при $j \neq \mu$ також продовжуються в G_1, то продовжуватиметься в область G_1 і доданок з (4), який відповідає $j = \mu$, тобто функція вигляду

$$\int_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)\right) f_0(\omega^\mu t)\,dt. \tag{5}$$

Скористаємось тепер наслідком леми, встановленої в [3]:

Лема. *Нехай $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, а f – деяка функція з $\mathcal{A}(G)$, яка не продовжується аналітично в область $\omega^\mu G$, де $\mu \in \{1, 2, ..., n-1\}$ таке, що $\omega^\mu G \neq G$. Якщо функція Φ вигляду*

$$\Phi(z) = \int_0^z \varphi(z-t)\, f(\omega^\mu t)\,dt, \quad z \in G_0,$$

аналітично продовжується в область G, то $\varphi(z) = 0$ для всіх $z \in G$.

Згідно з цією лемою, якщо в ролі Φ взяти функцію (5), а в ролі G — область G_1, отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z) = 0, \quad z \in G_1.$$

Тоді за теоремою єдиності

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z) = 0, \quad z \in G.$$

Отже, для кожної функції $f \in \mathcal{A}(G)$ маємо, що

$$F_f(z) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq j_1,\dots,j_s}}^{n-1} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk}(\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)\right) f(\omega^j t)\,dt,$$

тому функція F_f аналітична в області G. Тоді оператор T можна подати у такому вигляді

$$(Tf)(z) = f(z) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq j_1,\dots,j_s}}^{n-1} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t) \right) f(\omega^j t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{6}$$

Таким чином, встановлені необхідні умови такої теореми.

Теорема 1. *Нехай G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, для якої $\omega G \neq G$. Оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли функції $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ із $\mathcal{A}(G)$ задовольняють умови*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z) = 0, \quad z \in G, \quad j \in \{j_1, j_2, \dots, j_s\}, \tag{7}$$

де $j_1, j_2, \dots, j_s$ – всі такі числа $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, для яких $\omega^j G \neq G$. При цьому, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), зображається формулою (6).

Доведення. Достатність. Нехай для функцій $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ із $\mathcal{A}(G)$ виконуються умови (7), а оператор T визначається формулою (6). Зрозуміло, що T лінійно й неперервно діє з $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G)$. Крім цього, як показано в [1], оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, який задовольняє співвідношення (3) й (1). Тому оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. □

З теореми 1 отримаємо наступну теорему.

Теорема 2. *Якщо зіркова відносно нуля область G така, що $\omega^j G \neq G$ для всіх $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, то оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли*

$$a_k = \mathcal{I}^k a_0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \tag{8}$$

де a_0 – фіксована функція з $\mathcal{A}(G)$. При цьому, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), визначається формулою

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z (\mathcal{I}^{n-1} a_0)(z-t) f(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{9}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1, оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$ тоді й лише тоді, коли функції $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ із $\mathcal{A}(G)$ задовольняють співвідношення

$$\omega^{-j} \mathcal{I}^{n-2} a_1 + \omega^{-2j} \mathcal{I}^{n-3} a_2 + \dots + \omega^{-(n-1)j} a_{n-1} = -\mathcal{I}^{n-1} a_0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \tag{10}$$

Домноживши j-ту рівність з (10) на ω^{jn}, одержимо систему лінійних рівнянь відносно функцій $\mathcal{I}^{n-2} a_1, \mathcal{I}^{n-3} a_2, \dots, a_{n-1}$, головний визначник якої відмінний від нуля (бо він є визначником Вандермонда). Тому ця система має єдиний розв'язок. Оскільки, функції a_k вигляду (8) задовольняють співвідношення (10), то вони і визначають цей єдиний розв'язок. Враховуючи (8), з формули (6) отримується зображення (9) відповідного ізоморфізму T. □

2 Основний результат

Нехай $n \geq 3$ і область G не є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля, але існує таке $j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, що $\omega^j \neq 1$ і $\omega^j G = G$. Як було відзначено в [3], числа j та n не можуть бути взаємно простими. Більше того, якщо d – найбільший спільний дільник чисел j та n, то область G інваріантна відносно повороту на кут $\frac{2\pi d}{n}$ навколо нуля. Справді, згідно з характеристикою найбільшого спільного дільника двох цілих чисел, існують такі цілі числа q та r, що $d = qj + rn$. Тоді $\omega^d G = (\omega^j)^q (\omega^n)^r G = (\omega^j)^q G = G$.

Виберемо серед чисел $j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, для яких $\omega^j G = G$, найменше і позначимо його через p. Зауважимо, що число p є простим дільником числа n. Справді, якщо $d \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ є найбільшим спільним дільником чисел p і n, то, як було показано вище, $\omega^d G = G$, що суперечить вибору числа p. Отже, $n = mp$ для деякого $m \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ і область G є $\frac{2\pi}{m}$-інваріантною відносно нуля. Крім цього, співвідношення $\omega^j G = G$ виконується лише для чисел $j \in \{p, 2p, \dots, (m-1)p\}$. Знайдемо в цьому випадку простіший еквівалент умов (7) та зображення (6) ізоморфізму T, який задовольняє співвідношення (3) та (1).

Нехай оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Тоді, згідно з теоремою 1, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), визначається формулою (6), причому функції $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ задовольняють співвідношення (7). Оскільки, як було відзначено вище, рівності (7) виконуються при $j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{p, 2p, \dots, (m-1)p\}$, то дію оператора T на функцію $f \in \mathcal{A}(G)$ можна подати у такому вигляді

$$(Tf)(z) = f(z) - \frac{1}{p} \int_0^z \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t) \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega^{-lpk} f(\omega^{lp} t)\, dt.$$

Якщо покласти $\omega_1 = \omega^p = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, для $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ через Q_k позначити проектор на $\mathcal{A}(G)$, що визначається формулою

$$(Q_k f)(z) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_1^{-lk} f(\omega_1^l z),$$

причому вважати, що $Q_{jm+k} = Q_k$ при $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, то для $f \in \mathcal{A}(G)$

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (\mathcal{I}^{pm-jm-k-1} a_{jm+k})(z-t) (Q_k f)(t)\, dt.$$

Нехай

$$b_k(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (\mathcal{I}^{(p-j-1)m} a_{jm+k})(z), \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Тоді

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{I}^{m-k-1} b_k)(z-t) (Q_k f)(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{11}$$

Але, згідно з [1], такий оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, для якого $BT = T\mathcal{D}^m$, де

$$(Bf)(z) = (\mathcal{D}^m f)(z) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(z)(\mathcal{D}^k f)(0), \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{12}$$

Тому $AT = T\mathcal{D}^n = T(\mathcal{D}^m)^p = BT(\mathcal{D}^m)^{p-1} = \ldots = B^pT$. Оскільки T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, то отримаємо, що $A = B^p$.

Переконаємося далі, що

$$(\mathcal{D}^s b_k)(0) = 0, \quad s \in \{0, 1, \ldots, n-m-1\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}. \tag{13}$$

Диференціюючи (11), індукцією по $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ можна встановити, що для $f \in \mathcal{A}(G)$

$$(\mathcal{D}^l T f)(z) = (\mathcal{D}^l f)(z) - \sum_{j=m-l}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} (\mathcal{D}^k b_{j+k})(0)(\mathcal{D}^{j-m+l} Q_{j+k} f)(z)$$

$$- \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{I}^{m-k-l-1} b_k)(z-t)(Q_k f)(t)\, dt, \tag{14}$$

де під $\mathcal{I}^{-l}$ розумітимемо оператор $\mathcal{D}^l$, а під $\mathcal{I}^0$ – тотожний оператор. Диференціюючи (14) і використовуючи рівність $\mathcal{D}^j Q_k = Q_{k-j}\mathcal{D}^j$ при $1 \leq j \leq k$ та індукцію по $s \in \{0, 1, \ldots, n-m-1\}$, одержуємо, що

$$(\mathcal{D}^{m+s} T f)(z) = (\mathcal{D}^{m+s} f)(z) - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} (\mathcal{D}^k b_{j+k})(0)(\mathcal{D}^s Q_k \mathcal{D}^j f)(z)$$

$$- \sum_{j=0}^{s} \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{D}^{k+s-j} b_k)(0)(\mathcal{D}^j Q_k f)(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{D}^{k+s+1} b_k)(z-t)(Q_k f)(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{15}$$

З означення проекторів Q_k випливає, що

$$\mathcal{D}^j Q_k = Q_{k-j+lm}\mathcal{D}^j, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad k + m(l-1) < j \leq k + ml,$$

$$(Q_0 f)(0) = f(0), \quad (Q_k f)(0) = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Враховуючи (1) і ці співвідношення та покладаючи в (15) $f(z) = z^k$, отримаємо рівності (13).

Таким чином, встановлені необхідні умови такої теореми.

Теорема 3. *Нехай G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, для якої $\omega G \neq G$, а $p \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ – найменше таке число, для якого $\omega^p G = G$. Тоді $m = \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ і оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли $A = B^p$, де оператор B визначається формулою (12) для деяких функцій $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ із $\mathcal{A}(G)$, для яких виконується умова (13). При цьому, ізоморфізм T, який задовольняє (3) й (1), зображається формулою (11).*

Доведення. Достатність. Нехай для деяких функцій $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ із $\mathcal{A}(G)$ виконується умова (13), оператори B і T визначаються відповідно формулами (12) та (11) і $A = B^p$. Оскільки область G є $\frac{2\pi}{m}$-інваріантною відносно нуля, то, згідно з [1], оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, для якого $BT = T\mathcal{D}^m$. Тому, як і вище, $AT = B^pT = T\mathcal{D}^n$. Отже, оператори A та $\mathcal{D}^n$ еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Оскільки з рівностей (14) і (15) завдяки умові (13) випливає умова (1), то оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. $\square$

Література

1. Звоздецький Т. І. *Про еквівалентність лівих обернених до степеня інтегрування операторів у просторах аналітичних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 51–54.
2. Линчук С. С., Нагнибида Н. И. *Об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических в круге функций* // Математика сегодня'89. Научно-метод. сб. — 1989. — Вып. 5. — С. 47–62.
3. Нагнибида Н. И. *Об операторах, коммутирующих с кратным интегрированием в пространстве аналитических функций* // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 139–148.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
e-mail: *taras_zv@ukr.net*

Надійшло 23.02.2012

Zvozdetskyi T.I. *On the n-similarity of the operators which are left inverse to the n^{th} degree of the integration operator in the spaces of analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, 4, 2 (2012), 261–267.

We investigate the conditions of the n-similarity of the n^{th} degree of the differentiation operator to an operator which is left inverse to the n^{th} degree of the integration operator in the spaces of analytic functions.

Звоздецкий Т.И. *О n-эквивалентности левых обратных к n-ой степени интегрирования операторов в пространствах аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 261–267.

В данной работе исследуются условия n-эквивалентности n-ой степени оператора дифференцирования и произвольного левого обратного к n-ой степени интегрирования оператора в пространствах функций, аналитических в не $\frac{2\pi}{n}$-инвариантных областях.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Копач М.І.[1], Обшта А.Ф.[2], Шувар Б.А.[2]

АНАЛОГИ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ КУРПЕЛЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПІСЛЯДІЄЮ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 268–274.

Досліджені аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією, в яких праві частини мають властивість гетеротонності. Встановлені оцінки збіжності алгоритмів.

Вступ

Диференціальні рівняння з післядією виникають при моделюванні реальних процесів у техніці, медицині, біології, економіці, фізиці, демографії й інших галузях науки і техніки. В таких моделях, що мають протяжність у часі, стан об'єктів характеризується не лише параметрами біжучого моменту часу, а й нерідко залежить від їхнього попереднього стану. Наприклад, в процесах керування соціальними явищами істотний вплив мають ефекти інформаційного запізнення. При поширенні сигналів у каналах обернених зв'язків, що мають скінченну швидкість, яка пов'язана з ітераційністю регуляторів, теж потрібно враховувати запізнення за часом. В другій половині XX століття активізувався інтерес дослідників до диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних та інших класів операторних рівнянь, що містять запізнення. Перші теореми про існування розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та їх поведінку були встановлені В. Файтом [6], А.Д. Мишкісом [5], Норкіном [4] та іншими авторами. Динамічним системам, що описуються рівняннями із запізненням присвячено чимало робіт. В багатьох випадках на рівняння із запізненням аргументу можна поширити методику дослідження звичайних диференціальних рівнянь, в яких невідомі функції залежать тільки від поточного часу. В даній статті методику М.С. Курпеля (див. напр., [1]–[5]) побудови двосторонніх методів, застосовано для побудови двосторонніх наближень до розв'язків диференціальних рівнянь з післядією.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 30B70.

Ключові слова і фрази: двосторонні наближення, диференціальні нерівності, запізнення аргументу, метод кроків.

1 Постановка задачі

Розглянемо рівняння вигляду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{1}$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$ є неперервною при $t \in [t_0, T]$ дійсною функцією, причому $\Delta(t) \geq 0$, $g(t, y, z)$, $h(t, y, z)$ є неперервними при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M) = \{x||x - x_0| \leq M\}$, $(x, y, z, x_0 \in R^1)$ дійсними функціями. Шукатимемо неперервно диференційовний при $t \in [t_0, T]$ розв'язок $x(t)$ рівняння (1), який задовольняє початкову умову

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in E_0 = \{t|t \leq t_0, T \in R^1\}, \tag{2}$$

з неперервною функцією $\varphi(t)$.

2 Обґрунтування алгоритмів

Умовою А назвемо таке припущення: задані неперервні при $t \in [t_0, T]$, $y, z, p, q \in S(x_0, M)$ неспадні щодо y та p, незростаючі щодо z та q невід'ємні функції $a_{1i}(t, y, z, p, q)$, $b_{1i}(t, y, z, p, q)$, $\alpha_{1i}(t, y, z, p, q)$, $\beta_{1i}(t, y, z, p, q)$, $i = 1, 2$, для яких із співвідношень $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $p \leq q$ $y, z, p, q \in S(x_0, M)$ випливають нерівності

$$(a_{11}(t, y, z, p, q) + \alpha_{11}(t, y, z, p, q))(z - y) + (a_{12}(t, y, z, p, q) + \alpha_{12}(t, y, z, p, q))(q - p)$$

$$\leq g(t, z, q) - g(t, y, p),$$

$$(b_{11}(t, y, z, p, q) + \beta_{11}(t, y, z, p, q))(z - y) + (b_{12}(t, y, z, p, q) + \beta_{12}(t, y, z, p, q))(q - p)$$

$$\leq h(t, z, q) - h(t, y, p).$$

Задамо неперервно диференційовні при $t \in [t_0, T]$ функції $u(t), v(t) \in S(x_0, M)$, для яких

$$u(t) \leq \varphi(t) \leq v(t), \quad t \in E_0, \tag{3}$$

$$u(t) \leq v(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{4}$$

$$u'(t) \leq g(t, u(t), u(\tau(t))) - h(y, v(t), v(\tau(t))), \tag{5}$$

$$v'(t) \geq g(t, v(t), v(\tau(t))) - h(t, u(t), u(\tau(t))).$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул:

$$y_0(t) = u(t), \ z_0(t) = v(t), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) \\ &+ a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(y_{n+1}(\tau(t)) - y_n(\tau(t))) \\ &+ b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) \\ &+ b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t)))(z_{n+1}(\tau(t)) - z_n(\tau(t))) \\ &+ g(t, y_n(t), y_n(\tau(t))) - h(t, z_n(t), z_n(\tau(t))), \\ z'_{n+1} &= (a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) \\ &\alpha_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
+(a_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))) \\
+\alpha_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))))(z_{n+1}(\tau(t))-z_n(\tau(t))) \\
(+b_{11}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))) \\
+\beta_{11}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))))(y_{n+1}(t)-y_n(t)) \\
(+b_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))) \\
+\beta_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t))))(y_{n+1}(\tau(t))-y_n(\tau(t))) \\
+g(t,z_n(t),z_n(\tau(t)))-h(t,y_n(t),y_n(\tau(t))), \\
y_{n+1}(t)=z_{n+1}(t)=\varphi(t), \quad t\in E_0.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Теорема 1. *Нехай виконана умова А, задані функції $u(t), v(t)$, які задовольняють співвідношення (3)–(5). Тоді для ітераційного процесу (6)–(8) справджуються нерівності*

$$
y_t \le y_{n+1}(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \quad n=0,1,\ldots, t\in[t_0,T]. \tag{9}
$$

Доведення. Задля зручності позначимо:

$$
\begin{gathered}
a_{1i}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t)))=a_{1i}^n(t), \\
\alpha_{1i}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t)))=\alpha_{1i}^n(t), \\
b_{1i}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t)))=b_{1i}^n(t), \\
\beta_{1i}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t)),z_n(\tau(t)))=\beta_{1i}^n(t).
\end{gathered} \tag{10}
$$

Із (4)–(7) випливає

$$
\begin{gathered}
y_1'(t)-y_0'(t)\ge a_{11}^{(0)}(t)(y_1(t)-y_0(t))+a_{12}^{(0)}(t)(y_1(\tau(t))-y_0(\tau(t))) \\
+b_{11}^{(0)}(t)(z_0(t)-z_1(t))+b_{12}^{(0)}(t)(z_0(\tau(t))-z_1(\tau(t))), \\
z_0'(t)-z_1'(t)\ge(a_{11}^{(0)}(t)+\alpha_{11}^{(0)}(t))(z_0(t)-z_1(t)) \\
+(a_{12}^{(0)}(t)+\alpha_{12}^{(0)})(z_0(\tau(t))-z_1(\tau(t)))(b_{11}^{(0)}(y)+\beta_{11}^{(0)}(t))(y_1(t)-y_0(t)) \\
+(b_{12}^{(0)}(t)+\beta_{12}^{(0)}(t))(y_1(\tau(t))-y_0(\tau(t))).
\end{gathered} \tag{11}
$$

Додавши до умов (4)–(7) умову А, отримаємо

$$
z_1'-y_1'\ge(a_{11}^{(0)}(t)+b_{11}^{(0)}(t))(z_1(t)-y_1(t))+(a_{12}^{(0)}(t)+b_{12}^{(0)}(t))(z_1(\tau(t))-y_1(\tau(t))). \tag{12}
$$

Застосувавши до нерівностей (11) та (12) теорему про двосторонні диференціальні нерівності із запізненням аргументу [2], отримаємо, що $y_0(t)\le y_1(t)$, $z_1(t)\le z_0(t)$ та $y_1(t)\le z_1(t)$ при $t\in[t_0,T]$. Отже нерівності (9) мають місце при $n=0$.

Припускаючи, що ці нерівності справджуються для деякого $n=k-1>0$, аналогічно як при встановленні нерівностей (11)–(12) для $n=k$ матимемо

$$
\begin{gathered}
y_{k+1}'(t)-y_k'(t)\ge a_{11}^{(k)}(t)(y_{k+1}(t)-y_k(t))+a_{12}^k(t)(y_{k+1}(\tau(t))-y_k(\tau(t))) \\
+b_{11}^{(k)}(t)(z_k(t)-z_{k+1}(t))+b_{12}^k(t)(z_k(\tau(t))-z_{k+1}(\tau(t))),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_k'(t)-z_{k+1}'(t)\ge(a_{11}^{(k)}(t)+\alpha_{11}^k(t))(z_k(t)-z_{k+1}(t))+(a_{12}^k(t)+\alpha_{12}^k(t))(z_k(\tau(t))-z_{k+1}(\tau(t))) \\
+(b_{11}^{(k)}(t)+\beta_{11}^k(t))(y_{k+1}(t)-y_k(t))+(b_{12}^k(t)-\beta_{12}^k(t)(y_{k+1}(\tau(t))-y_k(\tau(t)))
\end{gathered}
$$

та

$$
z_{k+1}'(t)-y_{k+1}'(t)\ge(a_{11}^{(k)}(t)+b_{11}^k(t))(z_{k+1}(t)-y_{k+1}(t))+(a_{11}^{(k)}(t)+b_{12}^k(t))(z_{k+1}(\tau(t))-y_{k+1}(\tau(t)),
$$

що на підставі теореми про двосторонні диференціальні нерівності із запізненням аргументу дозволяє стверджувати про виконання нерівностей $y_{k+1}(t)\ge y_k(t)$, $z_{k+1}(t)\le z_k(t), y_{k+1}(t)\le z_k(t)$, при $t\in[t_0,T]$.

Згідно принципу математичної індукції робимо висновок про виконання нерівностей (9) для будь-якого n. Теорема доведена. □

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1 і система рівнянь*

$$
\begin{gathered}
y'(t)=g(t,y(t),y(\tau(t)))-h(t,z(t),z(\tau(t))), \\
z'(t)=g(t,z(t),z(\tau(t)))-h(t,y(t),y(\tau(t)))
\end{gathered} \tag{13}
$$

з початковою умовою

$$
y(t)=z(t)=\varphi(t) \tag{14}
$$

має на $[t_0,T]$ єдиний в класі неперервно диференційовних функцій розв'язок, то задача (1)–(2) має єдиний неперервно диференційовний розв'язок $x^*(t)$; для цього розв'язку і послідовностей $y_n(t)$, $z_n(t)$, побудованих за допомогою формул (6)–(8), мають місце співвідношення

$$
y_n(t)\le y_{n+1}(t)\le x^*(t)\le z_{n+1}(t)\le z_n(t). \tag{15}
$$

При цьому послідовності $y_n(t)$, $z_n(t)$ збігаються на $[t_0,T]$ рівномірно до $x^*(t)$ монотонно не спадаючи та монотонно не зростаючи відповідно.

Доведення. Доведення зводиться за суттю до повторення міркувань, використаних для обґрунтування теореми 1 □

Умовою B назвемо припущення про існування таких неперервних невід'ємних функцій $\alpha_{2i}(t,y,z,p,q),\beta_{2i}(t,y,z,p,q), i=1,2$, для яких із співвідношень $t\in[t_0,T], y\le z, p\le q, y,z,p,q\in S(x_0,M)$ випливають нерівності

$$
\begin{gathered}
g(t,z,q)-g(t,y,p)\le(a_{11}(t,z,y,p,q)+\alpha_{21}(t,z,y,p,q))(z-y) \\
+(a_{12}(t,z,y,p,q)+\alpha_{22}(t,z,y,p,q))(q-p), \\
h(t,z,q)-h(t,y,p)\le(b_{11}(t,z,y,p,q)+\beta_{21}(t,z,y,p,q))(z-y) \\
+(b_{12}(t,z,y,p,q)+\beta_{22}(t,z,y,p,q))(q-p),
\end{gathered}
$$

де функції $a_{1i}(t,z,y,p,q), b_{1i}(t,z,y,p,q)$, $i=1,2$, задовольняють умову А.

Теорема 3. *Нехай виконані умови A та B і задані функції $u(t), v(t)$, які задовольняють співвідношення (3)–(5). Тоді при $t \in [t_0, T]$, $n = 0, 1, \ldots$ для послідовностей $y_n(t), z_n(t)$, побудованих за допомогою формул (6)–(8), мають місце оцінки*

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))$$
$$+\varphi_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(\tau(t)) - y_{n+1}(\tau(t))) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)) + \varphi_n^{(1)}(t)(z_n(\tau(t)) - y_n(\tau(t))), \quad (16)$$

де

$$f_n^{(1)}(t) = a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$\varphi_n^{(1)}(t) = \alpha_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + \beta_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$f_n^{(2)}(t) = a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))),$$
$$\varphi_n^{(2)}(t) = \alpha_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))) + \beta_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t))).$$

Доведення. Достовірність оцінок (16) підтверджується за допомогою міркувань, які тільки подробицями відрізняються від міркувань, за допомогою яких встановлені оцінки (9) з теореми 1.

Зазначимо, що у тому випадку, коли до системи (7) можна застосувати відомий у теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу метод кроків, тобто, коли маємо ситуацію, за якої

$$\Delta(t) \ge \Delta_0 > 0,$$

то за припущень, які забезпечують виконання нерівності $z'_n(t) - y'_n(t) \ge 0$, при $t \in [t_0, T]$, $n = 0, 1, \ldots$, із (16) можна отримати

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le f_n(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \varphi_n(t)(z_n(t) - y_n(t)), \quad (17)$$

де $f_n(t) = f_n^{(2)}(t) + \varphi_n^{(2)}(t), f_n(t) = f_n^{(1)}(t) + \varphi_n^{(1)}(t)$. Звідси отримаємо оцінку вигляду:

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \le \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)(z_n(s) - y_n(s)) \exp\Big(\int_{s}^{t} f_n(\xi) d\xi\Big) ds. \quad (18)$$

З (17) та (18) можна отримати менш точні оцінки, поклавши $f_n(t) \le M_1, \varphi_n(t) \le M_2$.

Якщо ж метод кроків незастосовний, то виникають додаткові труднощі щодо можливості практичного розв'язання системи (7) щодо $y_{n+1}(t), z_{n+1}(t)$. Тому доцільно розглянути алгоритм, при побудові якого використовуються формули (6), (8), але систему рівнянь (7) замінено простішою системою вигляду:

$$y'_{n+1} = a_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) - b_{11}^{(n)}(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + g(t, y_n(t), y_n(\tau(t))) - h(t, z_n(t), z_n(\tau(t))),$$
$$(19)$$
$$z'_{n+1}(t) = (a_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) - (b_{11}^{(n)}(t) + \beta_{11}^{(n)}(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t))$$
$$+g(t, z_n(t), z_n(\tau(t))) - h(t, y_n(t), y_n(\tau(t))),$$

де маємо на увазі позначення (10).

Виконання нерівностей (9) для $n = 0$ випливає із співвідношень

$$y'_1(t) - y'_0(t) \ge a_{11}^{(0)}(t)(y_1(t) - y_0(t)) + b_{11}^{(0)}(t)(z_0(t) - z_1(t)),$$

$$z'_0(t) - z'_1(t) \ge (a_{11}^{(0)}(t) + \alpha_{11}^{(0)}(t))(z_0(t) - z_1(t))$$
$$+(b_{11}^{(0)}(t) + \beta_{11}^{(0)}(t))(y_1(t) - y_0(t)),$$

які отримуємо безпосередньо з (5), (6) та (19) для $n = 0$.

Звідси, як і раніше, за теоремою про диференціальні нерівності із запізненням аргументу, матимемо $y_1(t) \ge y_0(t), z_0(t) \ge z_1(t)$, при $t \in [t_0, T]$. Крім того, при $n = 0$ з (19) випливає

$$z'_1(t) - y'_1(t) \ge (a_{11}^{(0)}(t) + \beta_{11}^{(0)}(t))(z_1(t) - y_1(t)).$$

З теореми про диференціальні нерівності із запізненням аргументу можна зробити висновок, що $z_1(t) \ge y_1(t)$, при $t \in [t_0, T]$. Обґрунтуємо можливість переходу від $n-1$ до n в (9). Матимемо

$$y'_{n+1}(t) - y'_n(t) \ge a_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + b_{11}^{(n)}(t)(z_n(t) - z_{n-1}(t)),$$
$$z'_n(t) - z'_{n+1}(t) \ge (a_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + (b_{11}^{(n)}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)).$$

Звідси можна зробити висновок про обґрунтованість нерівностей

$$y_{n+1}(t) \ge y_n(t), z_{n+1}(t) \le z_{n-1}(t),$$

при $t \in [t_0, T]$, якщо справджуються нерівності $y_n(t) \ge y_{n-1}(t)$, $z_n(t) \le z_{n-1}(t)$.

Враховуючи це, одержуємо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} \ge (a_{11}^n(t) + b_{11}^n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))$$
$$-(a_{11}^{(n)} + b_{11}^{(n)}(t))(z_n(t) - y_n(t)) - a_{11}^{(n)}(t)(z_n(t) - z_{n+1}(t))$$
$$-\beta_{11}^{(n)}(t)(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + (a_{11}^{(n)}(t) + b_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(t) + \beta_{11}^{(n)}(t))(z_n(t) - y_n(t))$$
$$+(a_{12}^{(n)}(t) + b_{12}^{(n)}(t) + \alpha_{12}^{(n)}(t) + \beta_{12}^{(n)}(t))(z_n(\tau(t)) - y_n(\tau(t))).$$

Використовуючи теорему про диференціальні нерівності із запізненням аргументу матимемо, що $z_{n+1}(t) \ge y_{n+1}(t)$. Якщо $z_n(t) \ge y_n(t)$ при $t \in [t_0, T]$, то робимо висновок про виконання нерівностей (9) для алгоритму (6), (8), (19).

За зазначених обставин та додаткового припущення про єдиність розв'язку задачі (13), (14) приходимо до такого самого висновку щодо алгоритму (6), (8), (19), який містить теорема 2 щодо алгоритму (6)–(8). □

Наступна теорема підсумовує отриманий для алгоритму (6), (8), (19) висновок.

Теорема 4. *Нехай справджується умова A, задані неперервно диференційовні при $t \in [t_0, T]$ функції $u(t), v(t)$, які задовольняють співвідношення (3)–(5) і задача (13), (14) має єдиний розв'язок в класі неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ пар функцій. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, T]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) і послідовностей $y_n(t), z_n(t)$, утворених за допомогою формул (6), (8), (19) мають місце при $t \in [t_0, T], n = 0, 1, \ldots$ співвідношення (15).*

Приєднання до умов теореми 4 умови B призводить до формального вигляду (16). Цей факт спричинює те, що надлінійну збіжність для алгоритму (6), (8), (19) можна отримати в тому випадку, коли справджується строга нерівність у (16) і тому застосовний метод кроків. Система (7) містить запізнення у доданках з індексами $n+1$, тому її не завжди вдається розв'язати щодо $y_{n+1}(t), z_{n+1}(t)$. Це обгрунтовує потребу побудови спрощених аналогів алгоритму (6)–(8), окремі з яких можна знайти в [2].

Література

1. Курпель М.С. *Про деякі модифікації методу Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь* // Доповіді АН УРСР. Серія А. — 1969. — № 4. — С. 303–306.
2. Курпель М.С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. — К.: Наукова думка, 1980. — 276 с.
3. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
4. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1965. — 356 с.
5. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. — Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 515 с.
6. W. B. Fite *Properties of the solution of certain functional differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **22**, 3 (1921), 311–318.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

[2] Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна

Надійшло 17.08.2012

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Analogues of bilateral Kurpel's methods for differential equations with aftereffect*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 268–274.

It is studied analogues of bilateral Kurpel's methods for differential equations with aftereffect in which the right parts tend heteroton. Estimates of convergence of the algorithms established.

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Аналоги двусторонних методов Курпеля для дифференциальных уравнений с последействием* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 268–274.

Исследованы аналоги двусторонних методов Курпеля для дифференциальных уравнений с последействием, в которых правые части имеют свойство гетеротонности. Установлены оценки сходимости алгоритмов.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.95

Коркуна О.Є.

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА З ІНТЕГРАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Коркуна О.Є. *Мішана задача для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 275–283.

В обмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійного рівняння типу Ейдельмана, яке містить інтегральний доданок. Доведено існування та єдиність розв'язку цієї задачі в просторах Соболєва. Встановлено деякі оцінки цього розв'язку, залежно від вигляду ядра оператора.

Рівняння типу Ейдельмана є узагальненням параболічних за Петровським рівнянь на випадок, коли диференціювання за різними просторовими змінними має різну вагу порівняно з диференціюванням за часовою змінною. Задачу Коші для лінійних рівнянь такого типу розглянуто в [1, 2, 3, 12]. Встановленню розв'язності задачі Коші чи мішаних задач для рівнянь типу Ейдельмана зі степеневими нелінійностями присвячено праці [5, 6, 7, 11], а отриманню певних оцінок розв'язків для рівнянь такого типу в необмежених областях – [7, 11].

У даній роботі використавши метод Гальоркіна знайдено умови, за яких існує та єдиний розв'язок з просторів Соболєва мішаної задачі для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком. Встановлено деякі оцінки цього розв'язку, які залежать від ядра інтегрального доданка. Зауважимо, що розв'язності мішаних задач для деяких параболічних та гіперболічних рівнянь з інтегральними доданками присвячено праці [10, 13, 14, 15].

Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$ — обмежені області, причому $\partial\mathcal{D}_x \in C^1$ і $\partial\mathcal{D}_y \in C^1$.

Введемо позначення: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, $T < \infty$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j}$$

$$+c(z,t)|u|^{r-2}u + \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_iz_i}(z,s)ds = f(z,t), \qquad (1)$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.
Ключові слова і фрази: нелінійне рівняння типу Ейдельмана, узагальнений розв'язок, мішана задача.

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)} = 0, \tag{2}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \tag{3}$$

де $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $n = k+m$, ν — зовнішня нормаль до $\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t) \geq a_0 > 0$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$;

(B): $b_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq b_0|\xi|^2$, $b_0 > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ і майже для всіх $(z,t) \in Q_T$;

(C): $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(z,t) \geq c_0 > 0$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$;

(G): $g \in C^1([0,T])$;

(F): $f \in L^2(Q_T)$;

(U): $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_{0x_ix_j} \in L^2(\mathcal{D}_x)$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$.

Введемо простір:

$$V_0(\Omega) = \left\{u : u \in H_0^1(\Omega) \cap L^r(\Omega), u_{x_ix_j} \in L^2(Q_T), i,j \in \{1,\dots,k\}, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y} = 0\right\}.$$

Означення 1. *Функцію u, яка задовольняє включення $u \in L^2(0,T;V_0(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T)$ й інтегральну рівність*

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}v_{z_j} + c(z,t)|u|^{r-2}uv$$
$$- \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}(z,s)ds\, v_{z_i}(z,t) - f(z,t)v\Bigg]dxdt = 0$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх функцій $v \in C([0,T];C_0^2(\Omega))$, і початкову умову (3), назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G), (F), (U) і, крім того, $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$, a_{ijt}, b_{ijt}, $c_t \in L^\infty(Q_T)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).*

Доведення. Розглянемо послідовність $\{\varphi^s\}_{s=1}^\infty$ таку, що $\varphi^s \in V_0(\Omega)$ для довільного $s \in \mathbb{N}$; функції $\varphi^1,\dots,\varphi^l$ — лінійно незалежні для довільного $l \in \mathbb{N}$; лінійні комбінації $\{\varphi^s\}_{s=1}^\infty$ — щільні в $V_0(\Omega)$.

Нехай $u^N(z,t) = \sum\limits_{s=1}^{N} c_s^N(t)\varphi^s(z)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N,\dots,c_N^N$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int_{\Omega_\tau}\Bigg[u_t^N\varphi^s(z) + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}^N\varphi_{x_ix_j}^s(z) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}^N\varphi_{z_j}^s(z) + c(z,t)|u^N|^{r-2}u^N\varphi^s(z)$$

$$- \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}^N(z,s)\varphi_{z_i}^s(z)ds - f(z,t)\varphi^s(z)\Bigg]dz = 0, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$c_N^s(0) = u_{0,s}^N, \tag{5}$$

$$u_0^N(z) = \sum_{s=1}^{N} u_{0,s}^N\varphi^s(z).$$

На підставі теореми Каратеодорі [4, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (4), (5) на проміжку $[0,t_N]$, $t_N \in (0,T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_N = T$.

Домножимо рівність (4) на $c_s^N(t)$, підсумуємо за s від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ. Отримаємо

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_t^N u^N + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}^N|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}^N u_{z_j}^N + c(z,t)|u^N|^r$$
$$- \left(\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}^N(z,s)ds\right)u_{z_i}^N(z,t) - f(z,t)u^N\Bigg]dzdt = 0. \tag{6}$$

Оскільки виконуються умови (A), (B), (C), (G) та

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int_{Q_\tau} u_t^N u^N dzdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N|^2dz - \int_{\Omega_0}|u_0^N(z)|^2dz;$$

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}^N|^2dzdt \geq a_0\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^N|^2dzdt;$$

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}^N u_{z_j}^N dzdt \geq b_0\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{z_i}^N|^2dzdt;$$

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int_{Q_\tau} c(z,t)|u^N|^r dzdt \geq c_0\int_{Q_\tau}|u^N|^r dzdt;$$

$$\mathcal{I}_5 \equiv -\int_{Q_\tau}\left(\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}^N(z,s)ds\right)u_{z_i}^N(z,t)dzdt$$
$$\geq \frac{1}{2}\int_0^\tau g \circ \nabla_z u^N dt - \left(\int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\cdot\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{z_i}^N(z,t)|^2dzdt,$$

де $g \circ \nabla_z u \equiv \int_{\Omega_\tau}\int_0^t g(t-s)\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{z_i}(z,s) - u_{z_i}^N(z,t)|^2dsdz$,

$$\mathcal{I}_6 \equiv \int_{Q_\tau} f(z,t)u^N dzdt \leq \int_{Q_\tau}\left[\frac{|f(z,t)|^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2}|u^N|^2\right]dzdt \leq \int_{Q_\tau}\left[\frac{|f(z,t)|^2}{2\delta} + \frac{\delta C}{2}\sum_{i=1}^{n}|u_{z_i}^N|^2\right]dzdt,$$

то з (6) матимемо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N(z,\tau)|^2dz + a_0\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^N|^2dzdt + \left(b_0 - \frac{\delta C}{2} - \int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{z_i}^N|^2dzdt$$
$$+ c_0\int_{Q_\tau}|u^N|^r dzdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g \circ \nabla_z u^N dt \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u_0^N(z)|^2dz + \frac{1}{2\delta}\int_{Q_\tau}|f(z,t)|^2dzdt. \tag{7}$$

Виберемо δ так, щоб $b_0 - \dfrac{\delta C}{2} - \displaystyle\int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$. Тоді з (7) отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} |u^N(z,\tau)|^2 dz + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_i x_j}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{z_i}|^2 + |u^N|^r \right] dzdt + \int_0^\tau g \,\square\, \nabla_z u dt$$

$$\le M_1 \left[\int_{\Omega_\tau} |u_0^N(z)|^2 dz + \int_{Q_\tau} |f(z,t)|^2 dzdt \right], \qquad (8)$$

де стала M_1 не залежить від N.

Продиференціюємо рівність (4) за t, домножимо на $c^N_{st}(t)e^{-\nu t}$, де $\nu > 0$, підсумуємо за s від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ. Отримаємо

$$\int_{\Omega_\tau} \left[u^N_{tt} u^N_t + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) |u^N_{x_i x_j t}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ijt}(z,t) u^N_{x_i x_j} u^N_{x_i x_j t} \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u^N_{z_i t} u^N_{z_j t} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(z,t) u^N_{z_i} u^N_{z_i t} + c_t(z,t)|u^N|^{r-2} u^N u^N_t + (r-1)c(z,t)|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2$$

$$\left. - g(0) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i} u^N_{z_i t} - \left(\int_0^t g'_t(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,s) ds \right) u^N_{z_i t} - f_t(z,t) u^N_t \right] e^{-\nu t} dzdt = 0. \qquad (9)$$

Оцінимо кожний доданок цієї рівності окремо:

$$\mathcal{I}_7 = \int_{Q_\tau} u^N_{tt} u^N_t e^{-\nu t} dzdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau} dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (u^N_t)^2 dz\Big|_{t=0} + \frac{\nu}{2}\int_{Q_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_8 = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u^N_{x_i x_j t}|^2 e^{-\nu t} dzdt \ge a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_i x_j t}|^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_9 = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ijt}(z,t) u^N_{x_i x_j} u^N_{x_i x_j t} e^{-\nu t} dzdt$$

$$\le \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (u^N_{x_i x_j t})^2 e^{-\nu t} dzdt + \frac{a^1}{2\delta} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_i x_j}|^2 e^{-\nu t} dzdt,$$

де $a^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} a^2_{ijt}$.

$$\mathcal{I}_{10} = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u^N_{z_i t} u^N_{z_j t} e^{-\nu t} dzdt \ge b_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i t})^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{11} = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(z,t) u^N_{z_i} u^N_{z_i t} e^{-\nu t} dzdt \le \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i t})^2 e^{-\nu t} dzdt + \frac{1}{2\delta} b^1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i})^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{12} = \int_{Q_\tau} c_t(z,t)|u^N|^{r-2} u^N u^N_t e^{-\nu t} dzdt \le \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} |u^N|^{r-2} (u^N_t)^2 e^{-\nu t} dzdt + \frac{c^1}{2\delta} \int_{Q_\tau} |u^N|^r e^{-\nu t} dzdt,$$

де $c^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} c^2_t(z,t)$, $b^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} b^2_{ij}(z,t)$,

$$\mathcal{I}_{13} = \int_{Q_\tau} (r-1)c(z,t)|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 e^{-\nu t} dzdt \ge (r-1)c_0 \int_{Q_\tau} |u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{14} = -\int_{Q_\tau} \left[g(0) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,t) u^N_{z_i t}(z,t) + \left(\int_0^t g'_t(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,s) ds \right) u^N_{z_i t} \right] e^{-\nu t} dzdt$$

$$= -\int_{Q_\tau} \left[g(0) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,t) u^N_{z_i t}(z,t) - \left(\int_0^t g'_s(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,s) ds \right) u^N_{z_i t} \right] e^{-\nu t} dzdt$$

$$= -\int_{Q_\tau} \left(\int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i s}(z,s) ds \right) u^N_{z_i t} e^{-\nu t} dzdt - \int_{Q_\tau} g(t) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,0) u^N_{z_i t} e^{-\nu t} dzdt$$

$$\ge \frac{1}{2} \int_0^\tau g \,\square\, \nabla_z u^N_t dt - \left(\int_0^\infty g(\xi) d\xi \right) \cdot \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^N_{z_i t}(x,t)|^2 e^{-\nu t} dzdt$$

$$-\frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i t})^2 e^{-\nu t} dzdt - \frac{1}{2\delta} \int_{Q_\tau} (g(t))^2 \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0 z_i})^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{15} = -\int_{Q_\tau} f_t(z,t) u^N_t e^{-\nu t} dzdt \ge -\frac{1}{2\delta} \int_{Q_\tau} (f_t(z,t))^2 e^{-\nu t} dzdt - \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu t} dzdt.$$

З (5) при $t = 0$ випливає, що

$$\int_{\Omega_0} (u^N_t)^2\Big|_{t=0} dz + \int_{\Omega_0} \left[\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,0)(u^N_{x_i x_j}(z,0))^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,0)(u^N_{z_i}(z,0))^2 \right.$$

$$\left. + c(z,0)|u^N(z,0)|^r - f(z,0) u^N(z,0) \right] dz = 0.$$

Звідси, $\displaystyle\int_{\Omega_0} (u^N_t)^2\Big|_{t=0} dz \le M$, де стала M не залежить від N.

Врахувавши оцінки $\mathcal{I}_7$–$\mathcal{I}_{15}$, отримуємо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau} dz + (\nu - \delta) \cdot \int_{Q_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau} dzdt + (2a_0 - \delta) \cdot \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_i x_j t}|^2 e^{-\nu t} dzdt$$

$$+ \left(2b_0 - 2\delta - 2\int_0^\infty g(\xi) d\xi \right) \cdot \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i t})^2 e^{-\nu t} dzdt$$

$$+ ((r-1)c_0 - \delta) \int_{Q_\tau} |u^N|^{r-2} (u^N_t)^2 e^{-\nu t} dzdt + \int_0^\tau g \,\square\, \nabla_z u^N_t dt$$

$$\le \frac{1}{\delta} \int_{Q_\tau} (f_t(z,t))^2 e^{-\nu t} dzdt + \int_{\Omega_0} (u^N_t)^2 dz\Big|_{t=0} + \frac{a^1}{\delta} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_i x_j}|^2 e^{-\nu t} dzdt + M$$

$$+ \frac{1}{\delta} b^1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i})^2 e^{-\nu t} dzdt + \frac{c^1}{\delta} \int_{Q_\tau} |u^N|^r e^{-\nu t} dzdt + \frac{1}{\delta} \int_{Q_\tau} (g(t))^2 \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0 z_i})^2 e^{-\nu t} dzdt. \qquad (10)$$

Виберемо $\delta = \min\left\{ a_0; \dfrac{b_0}{2} - \displaystyle\int_0^\infty g(\xi) d\xi; (r-1)c_0 \right\}$, а $\nu = \delta + 1$. Праву частину рівності (10) оцінимо врахувавши оцінку (8). Маємо:

$$\int_{\Omega_\tau} (u^N_t)^2 dz + \int_{Q_\tau} \left((u^N_t)^2 + \sum_{i,j=1}^{k} (u^N_{x_i x_j t})^2 + \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i t})^2 + |u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 \right) dzdt$$

$$+ \int_0^\tau g \,\square\, \nabla_z u^N_t dt \le M_2 \left(\int_{\Omega_0} (u^N_0(z))^2 dz + \int_{Q_\tau} [|f(z,t)|^2 + |f_t(z,t)|^2] dzdt \right), \qquad (11)$$

де стала M_2 не залежить від N.

З оцінок (8) та (11) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ (збережемо за нею те саме позначення) при $N \to \infty$.

$$\begin{aligned} &u_t^N \to u_t \ * \text{ слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ &u_{x_ix_j}^N \to u_{x_ix_j} \text{ слабко в } L^2(Q_T)\ (i,j=1,\dots,k) \\ &u_{z_it}^N \to u_{z_it} \text{ слабко в } L^2(Q_T)\ (i=1,\dots,n) \\ &u^N \to u \text{ слабко в } L^2(0,T;V_0(\Omega)). \end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки з (12) випливає, що $u^N \to u$ слабко в $L^2(Q_T)$ та $u_{z_i}^N \to u_{z_i}$; $u_{z_it}^N \to u_{z_it}$ слабко в $L^2(Q_T)$, то за лемою 1.3 [9] $u^N \to u$ сильно в $L^2(Q_T)$ і майже скрізь. Тому, $|u^N|^{r-2}u^N \to |u|^{r-2}u$ слабко в $L^r(Q)$. Далі, врахувавши збіжності (12), аналогічно, як в [8], доводимо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). □

Єдиність розв'язку

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G), $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$. Тоді задача (1)–(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Нехай існує два розв'язки задачі (1)–(3) u^1 та u^2. Позначимо $u = u^1 - u^2$. Кожна з функцій u^1 та u^2 задовольняє означення 1. Тоді функція u задовольняє рівність

$$\int_{Q_\tau} \Big[u_t u + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)(u_{x_ix_j})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)(u_{z_i})^2 + c(z,t)(|u^1|^{r-2}u^1 - |u^2|^{r-2}u^2)u$$
$$- \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}(z,s)ds \cdot u_{z_i}(z,t) \Big] = 0$$

та початкову умову $u(z,0) = 0$.

Провівши оцінки цієї рівності аналогічно до оцінок $\mathcal{I}_1$–$\mathcal{I}_5$ та врахувавши, що

$$\int_{Q_\tau} [c(z,t)(|u^1|^{r-2}u^1 - |u^2|^{r-2}u^2)u]dzdt \geq 0,$$

знайдемо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u|^2 dz + a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}|^2 dzdt + \left(b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi\right) \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{z_i}|^2 dzdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g \circ \nabla_z u dt \leq 0.$$

Звідси випливає, що $u^1 \equiv u^2$. □

Оцінка розв'язку

Теорема 3. *Нехай u — розв'язок задачі (1)–(3), крім того, $a_{ij}(z,t) = a_{ij}(z)$, $b_{ij}(z,t) = b_{ij}(z)$, $f \equiv 0$, $c(z,t) = c(z)$. Тоді*

1) якщо існує така стала $c > 0$, що $g(t) \leq g(0)e^{-ct}$, то

$$\int_{\Omega_t} [u^2 + u_t^2] dz \leq \left(\int_{\Omega_0} [u^2 + u_t^2] dz + \frac{M}{\delta|\mu - 2c|} \right) e^{-\kappa t},$$

де $\mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right)$, $M = \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n (u_{0z_i})^2 dz$;

2) якщо $g'(t) \leq -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, $c_3 > 0$, то існує така стала $c_4 \geq 0$, що для розв'язку задачі (1)–(3) виконується оцінка

$$\int_{\Omega_t} [u^2 + u_t^2] dz \leq \frac{c_4}{(t+1)^{2p-1}}.$$

Доведення. Нехай $\nu = 0$. Тоді, провівши аналогічні оцінки, як $\mathcal{I}_1$–$\mathcal{I}_{14}$, знайдемо

$$\left(\int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2) dz \right)_t + 2a_0 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (|u_{x_ix_j}^N|^2 + |u_{x_ix_jt}^N|^2) dz$$
$$+ \left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta \right) \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} ((u_{z_it}^N)^2 + (u_{z_i}^N)^2) dz$$
$$+ 2c_0 \int_{\Omega_\tau} (u^N)^r dz + (r-1)c_0 \int_{\Omega_\tau} |u^N|^{r-2}(u_t^N)^2 dz + g \circ \nabla_z u + g \circ \nabla_z u_t^N$$
$$\leq \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\tau} (g(t))^2 \sum_{i=1}^{n} (u_{0z_i}^N)^2 dz. \tag{13}$$

Оскільки для функцій u^N та u_t^N виконуються нерівності Фрідріхса:

$$\int_{\Omega_\tau} u^N dz \leq c_1 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{z_i}^N dz, \qquad \int_{\Omega_\tau} u_t^N dz \leq c_1 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{z_it}^N dz,$$

де стала c_1 не залежить від u, N, а залежить тільки від n та Ω, то, врахувавши невід'ємність 4, 5, 6, 7 доданків, а також, що

$$\int_{\Omega_\tau} \left(\sum_{i=1}^{k} (u_{x_i}^N)^2 \right) dz \leq c_2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u_{x_ix_i}^N)^2 dz,$$

$$\int_{\Omega_\tau} (u^N)^2 dz \leq c_2^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u_{x_ix_i}^N)^2 dz,$$

$$\int_{\Omega_\tau} (u_t^N)^2 dz \leq c_2^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u_{x_ix_it}^N)^2 dz,$$

з (13) знайдемо

$$\left(\int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2) dz \right)_t + \left(\frac{1}{c_2^2} \cdot 2a_0 + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta \right) \right) \int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2) dz$$
$$\leq \frac{1}{\delta}(g(t))^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u_{0z_i}^N)^2 dz.$$

Позначимо

$$s(\tau) = \int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2) dz, \qquad \mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta \right).$$

З умови задачі можемо вибрати δ так, щоб $\mu > 0$. Матимемо нерівність

$$s'(t) \leq -\mu s(t) + \frac{1}{\delta}(g(t))^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u_{0z_i}^N)^2 dz. \tag{14}$$

Розглянемо такі випадки:

1) $g(t) \leq g(0)e^{-ct}$

Тоді з (14) знайдемо $s'(t) \leq -\mu s(t) + \frac{1}{\delta}e^{-2ct}M$, де $M = \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u_{0z_i}^N)^2 dz$.

Розв'яжемо цю нерівність подібно як в [13, с. 109]: $(se^{\mu t})' \leq \frac{1}{\delta}Me^{(\mu-2c)t}$. Інтегруємо по t від 0 до τ:

$$s(\tau) \leq s(0)e^{-\mu\tau} + \frac{M}{\delta(\mu-2c)}e^{-2c\tau} - \frac{M}{\delta(\mu-2c)}e^{-\mu\tau}.$$

Звідси, якщо $\mu > 2c$, то $e^{-\mu\tau} < e^{-2c\tau}$ та $s(\tau) \leq \left(s(0) + \frac{M}{\delta(\mu-2c)}\right)e^{-2c\tau}$.

У іншому випадку ($\mu < 2c$)

$$s(\tau) \leq \left(s(0) + \frac{M}{\delta(2c-\mu)}\right)e^{-\mu\tau}.$$

Отже, маємо оцінку

$$s(\tau) \leq \left(s(0) + \frac{M}{\delta|\mu-2c|}\right)e^{-\kappa\tau},$$

де $\kappa = \min\{2c; \mu\}$.

2) Нехай $g'(t) \leq -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{\nu}}$, $\nu \geq 1$.

Тоді $g(t) \leq \dfrac{k}{(t+1)^\nu}$, де $k = g(0)$, коли $p < c_2[g(0)]^{1/\nu}$ і $k = \left(\dfrac{\nu}{c^2}\right)^\nu$, коли $\nu > c_2[g(0)]^{1/\nu}$. Позначимо $q = 2\nu - 1$,

$$c_3 = \left(\max\left\{s(0);\ \frac{k^2}{\mu\delta}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{0z_i})^2dz\right\}\right)^{-1/q}.$$

Тоді, оскільки $-\mu s(t) < -\mu c_3 s(t)^{1/q-1}$, то з (14) отримаємо оцінку

$$s'(t) \leq -\mu c_3(s(t))^{1/q+1} + \frac{k_1}{(1+t)^{1+q}},$$

де $k_1 = \dfrac{k^2}{\delta}\displaystyle\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{0z_i})^2dz.$

Розв'язавши цю нерівність аналогічно до [14, с.16], отримаємо $s(t) \leq \frac{M_3}{(t+1)^{2\nu-1}}$, де стала M_3 залежить від $s(0)$.

Оскільки

$$\int_{\Omega_\tau}(u^2 + u_t^2)dz \leq \lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_\tau}[(u^N)^2 + (u_t^N)^2]dz,$$

то звідси випливає твердження теореми 3. □

Література

1. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д. *Про властивості розв'язків $\vec{2b}$–параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т.45, №4. — С. 19–26.

2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$\vec{2b}$-параболические системы* // Труды семинара по функц. анализу. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1968. — Вып.1. — С. 3–175.

3. Івасишен С.Д., Кондур О.С. *Про аналітичність розв'язків 2b–параболічних систем* // Укр. мат. журн. — 2006. — Т.58, №2. — С. 160–167.

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.

5. Коркуна О.Є. *Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння* // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.60. №5. — С. 586–602.

6. Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області* // Доповіді НАН України. — 2008. — Вип.4. — С. 24–30.

7. Коркуна О., Лавренюк С. *Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного 2b-параболічного рівняння* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2007. — Вип.67. — С. 153–165.

8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.

9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

10. Процах Н. П. *Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в нециліндричній області* // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2010. — Вип.8. — С. 60–70.

11. Торган Г. Р. *Неіснування глобального розв'язку змішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана* // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2008. — Вип.6. — С. 98–103.

12. Эйдельман С. Д. *Об одном классе параболических систем* // Доклады АН СССР. — 1960. — Т.133, №1. — С. 40–43.

13. Protsakh N. P. *Properties of solution for mixed problem for ultraparabolic equation with the memory term*, Ukr. Math. Bul., 9, 1 (2012), 98–113.

14. Santos M. L. *On the wave equations with memory in noncylindrical domains*, Electronic Journal of Differential Equations, **2007**, 128 (2007), 1–18.

15. Santos M. L., Rocha M. P. C., Braga P. L. O. *Global solvability and asymptotic behaviour for a nonlinear coupled system of viscoelastic waves with memory in a noncylindrical domain*, J. Math. Anal. Appl., **325** (2007), 1077–1094.

Національний лісотехнічний університет України,

Львів, Україна

e-mail: *olesya.korkuna@gmail.com*

Надійшло 01.06.2012

Korkuna O.E. *Mixed problem for nonlinear Eidelman equation with integral term*, Carpathian Mathematical Publications, 4, 2 (2012), 275–283.

The mixed problem for the nonlinear Eidelman type equation containing the integral term is considered in a bounded domain. The existence and uniqueness of solution of this problem in Sobolev's space are proved. Some estimates of this solution are setted depending on the kernel of the operator.

Коркуна О.Е. *Смешанная задача для нелинейного уравнения типа Эйдельмана с интегральным слагаемым* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 275–283.

В ограниченной области рассмотрено смешанную задачу для нелинейного уравнения типа Эйдельмана, которая имеет интегральное слагаемое. Доказано существование и единственность решения этой задачи в пространствах Соболева. Установлено некоторые оценки этого решения, в зависимости от вида ядра оператора.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Labachuk O.V., Zagorodnyuk A.V.

MULTIPLICATIVE POLYNOMIAL MAPPINGS ON COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

Labachuk O.V., Zagorodnyuk A.V. *Multiplicative polynomial mappings on commutative Banach algebras*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 284–288.

We consider the multiplicative polynomial mappings on commutative algebras in this work. We call a multiplicative polynomial trivial, if it can be represented as a product of characters. In the paper we investigate the following question: does there exists a nontrivial multiplicative polynomial functional on a commutative algebra?

Introduction and definitions

Let X and Y be linear spaces. A map $P_n : X \to Y$ is an n *degree homogeneous polynomial* (n-homogeneous polynomial) if there is an n-linear mapping $B_n : \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} \to Y$ such that $P_n(x) = B_n(x, x, \ldots, x)$.

Note that according to the polarization formula (see [5]), for every n-homogeneous polynomial P_n there exists a unique symmetric n-linear mapping B_n, associated with P_n.

The polynomial mapping P between algebras X and Y is called *multiplicative*, if $P(x_1 \cdot x_2) = P(x_1) \cdot P(x_2)$ for every $x_1, x_2 \in X$. It is known that every multiplicative polynomial functional is homogeneous ([7]).

Let us denote by $M(X)$ the set of characters (linear multiplicative functionals) on the algebra X. It is clear that the product of characters $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \ldots \cdot \varphi_n$, $\varphi_k \in M(X)$, $k = 1, \ldots, n$ is a multiplicative polynomial functional.

We call a multiplicative polynomial *trivial*, if it can be represented as a product of characters.

There is an example of nontrivial multiplicative polynomial on noncommutative algebra. Let us consider the algebra of square $n \times n$ matrixes M_n. The mapping $d(A) = \det(A)$ is a multiplicative polynomial functional, but $d(A)$ is not a product of characters because M_n has no nonzero characters. So, it is interesting to know: *Does there exists a nontrivial multiplicative polynomial functional on a commutative algebra?*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A69, 46J20, 46G20.
Key words and phrases: multiplicative polynomial functional, characters, commutative algebras.

1 Main results

Proposition 1.1. *If a commutative semi-simple Banach algebra A without nilpotent elements admits a nontrivial multiplicative polynomial, then the algebra $P(\mathbb{C}^m)$ of polynomials of m variables admits a nontrivial multiplicative polynomial for some m.*

Proof. Let P be a nontrivial multiplicative polynomial map. Without loss of the generality we can assume that P is irreducible. Then there exists a finite dimensional subspace V in A such that the restriction of P onto V is irreducible [8].

Let us consider a subalgebra A_0 generated by elements in V and the unity of A. This subalgebra is finitely generated and has no nilpotent elements. It is well known in Algebraic Geometry that such algebra is isomorphic to a ring of all polynomials on an algebraic variety. That is, A_0 is isomorphic to $P(\mathbb{C}^m)/I$ for some m where I is an ideal in $P(\mathbb{C}^m)$. Let $T : P(\mathbb{C}^m) \to P(\mathbb{C}^m)/I$ be the factor map and P_0 be the restriction of P onto A_0. Then $P_0 \circ T$ is a required irreducible nontrivial multiplicative polynomial on $P(\mathbb{C}^m)$. □

So, it can be useful to investigate the algebra $P(\mathbb{C}^m)$ of polynomials of m variables.

Theorem 1. *Every multiplicative n degree polynomial functional can be represented as a product of characters on the algebra $P(\mathbb{C})$ of polynomials of one complex variable.*

Proof. Let $D_n : P(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ be a multiplicative n degree polynomial functional. D_n is a homogeneous polynomial map. According to [7] there is a character d_n on the symmetric tensor product $\underbrace{P(\mathbb{C}) \otimes_s \ldots \otimes_s P(\mathbb{C})}_{n} = \otimes_s^n P(\mathbb{C})$ such that $D_n(p) = d_n(\otimes^n p)$ for every $p \in P(\mathbb{C})$.

Let us describe the algebra $\otimes_s^n P(\mathbb{C})$. Every element of this algebra can be presented by

$$\sum_i \underbrace{p_i \otimes \ldots \otimes p_i}_{n},$$

where $p_i \in P(\mathbb{C})$. Every element like $\otimes^n p_i$ is a polynomial of n variables $p_i(x_1) \cdot \ldots \cdot p_i(x_n)$. So, algebra $\otimes_s^n P(\mathbb{C})$ is isomorphic to the algebra of polynomials of n variables, that are symmetric about the permutation of this variables. Let us denote it by $P_s(\mathbb{C}^n)$.

It is well known that for every symmetric polynomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ there exists a polynomial q, such that

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

where

$$G_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n,$$

$$G_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$G_n = x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

that is G_i, $i = 1, \ldots, n$ are the elementary symmetric polynomials. The mapping $p \mapsto q$ is an isomorphism from the algebra $P_s(\mathbb{C}^n)$ of symmetric polynomials onto the algebra of all polynomials $P(\mathbb{C}^n)$. Every character of algebra $P(\mathbb{C}^n)$ is an evaluation of some point $\mathbb{C}^n$. So, there is a correspondence between characters d_n on $\otimes^n P(\mathbb{C})$ and some characters φ on $P(\mathbb{C}^n)$, which is an evaluation of polynomial q at some point $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$. That is,

$$d_n(\otimes^n p) = d_n(p(x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_n)) = \varphi(q(x_1,\ldots,x_n)) = q(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

where $p(x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_n) = q(G_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,G_n(x_1,\ldots,x_n))$. Let $x_1^0,\ldots,x_n^0$ be the solutions of system

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=\alpha_1;\\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\alpha_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\alpha_n\end{cases}$$

According to the Viet theorem, $x_1^0,\ldots,x_n^0$ are the solutions of the equation

$$x^n-\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^n\alpha_n=0.$$

Then $D_n(p)=q(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=p(x_1^0)\cdot\ldots\cdot p(x_n^0)$, that was needed to show. □

To prove of this theorem we use the existence of a homomorphism from $\otimes^n P(\mathbb{C}) = P(^n\mathbb{C})$ onto $\otimes_s^n P(\mathbb{C})$. It is easy to show that this condition is sufficient in the general case.

Theorem 2. *If there exists a surjective homomorphism $\varphi:\otimes^n A\to\otimes_s^n A$, then every n-homogeneous multiplicative polynomial on algebra A can be represented as a product of characters.*

Proof. Suppose that there exists the surjective homomorphism φ from $\otimes^n A$ onto $\otimes_s^n A$. For a given n-homogeneous multiplicative polynomial $D(x)$, $x\in A$, it is defined a character d on $\otimes_s^n A$ such that

$$d(\otimes^n p)=D(x).$$

Thus

$$\otimes^n A\to\otimes_s^n A\to\mathbb{C}$$

Let $p\in\otimes_s^n A$ and $u\in\varphi^{-1}(p)$, $u\in\otimes^n A$. Then $d\circ\varphi$ is a character on $\otimes^n A$ and $d\circ\varphi(u)=d(p)$. According to [4], every character of $\otimes^n A$ is of the form

$$d\circ\varphi(a\otimes\ldots\otimes a)=\psi_1(a)\ldots\psi_n(a),$$

$a\in A$ for some characters $\psi_1,\ldots,\psi_n$ on A. So if $p=a\otimes\ldots\otimes a$, then

$$D(a)=d(p)=d\circ\varphi(u)=\psi_1(a)\ldots\psi_n(a),$$

that is, D is trivial. □

Corollary 1.1. *Let A be the completion of algebra $P(\mathbb{C})$ in some locally convex metrizabled topology τ, such that (A,τ) is a topology algebra. Then every multiplicative polynomial by n degree on A can be presented as a product of characters.*

Theorem 3. *Every multiplicative polynomial of second degree is trivial on the algebra $P(\mathbb{C}^2)$ of polynomials of two variables.*

Proof. We use a similar idea that in proof of Theorem 1. Let $D_2:P(\mathbb{C}^2)\to\mathbb{C}$ be a homogeneous multiplicative polynomial by second degree. Due to [7], there exists the character d on the symmetric tensor product $P(\mathbb{C}^2)\otimes_s P(\mathbb{C}^2)$ such that $D_2(p)=d_2(p\otimes p)$ for any $p\in P(\mathbb{C}^2)$.

The algebra $P(\mathbb{C}^2)\otimes_s P(\mathbb{C}^2)$ is isomorphic to an algebra of four variables polynomials generated by $p(x_1,y_1)p(x_2,y_2)$, which are symmetric about the permutations of pairs x_1,y_1 and x_2,y_2 simultaneously. These polynomials are called block-symmetric polynomials.

A polynomial wich is symmetric with respect to the permutation of pairs x_1,y_1 and x_2,y_2, can be presented by polynomials $R_1=x_1+x_2$, $R_2=x_1x_2$, $R_3=y_1+y_2$, $R_4=y_1y_2$, $R_5=x_1y_2+x_2y_1$, that is $p(x_1,y_1)p(x_2,y_2)=q(R_1,R_2,R_3,R_4,R_5)$. But the polynomials R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 are algebraically depending and this dependence can be wrote by the following formula:

$$R_5^2-R_1R_3R_5+R_1^2R_4-4R_2R_4+R_3^2R_2=0. \tag{1}$$

Thus the polynomial q is an element of factor-algebra which is generated by polynomial (1) and it is determined by this polynomial zeros. The character d on $P(\mathbb{C}^2)\otimes_s P(\mathbb{C}^2)$ is a value of polynomial q at the point $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$, which is the solution of the equation (1), that is

$$d(p\otimes p)=d(p(x_1,y_1)p(x_2,y_2))=q(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5),$$

where $p(x_1,y_1)p(x_2,y_2)=q(R_1,R_2,R_3,R_4,R_5)$. Let x_1^0,x_2^0,y_1^0,y_2^0 be the solution of the equations system

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha_1;\\ x_1x_2=\alpha_2;\\ y_1+y_2=\alpha_3;\\ y_1y_2=\alpha_4;\\ x_1y_2+x_2y_1=\alpha_5\end{cases}$$

According to the Viet theorem the pairs x_1^0,x_2^0 and y_1^0,y_2^0 are the solution of the equations

$$x^2-\alpha_1x+\alpha_2=0,$$

$$y^2-\alpha_3x+\alpha_4=0$$

respectively. Now we need to put $\alpha_5=x_1^0y_2^0+x_2^0y_1^0$. Then $D_2(p)=q(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=p(x_1^0,y_1^0)p(x_2^0,y_2^0)$, that was needed to show. □

Using similar methods and recent results on block-symmetric polynomials [1] it is possible to prove an analogue of Theorem 3 for n degree multiplicative polynomials on $P(\mathbb{C}^2)$.

REFERENCES

1. Загороднюк А.В., Кравців В.В. *Симетричні поліноми на добутках банахових просторів* // Карпат. мат. публ., — 2010. — Т.2, №1. — С. 59–71.

2. Колмогоров А., Фомин С. Елементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
3. Gamelin T.W. Analytic functions on Banach spaces in Complex Function Theory, Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
4. Lamadrid J. G. *Uniform cross norms and tensor products of Banach algebras,* Bull. Amer. Math. Soc., **69**, 6 (1963), 797–803.
5. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.
6. Rudin W. Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.
7. Zagorodnyuk A.V. *Multiplicative polynomial operators on topological algebras,* Contemporary Mathematics, **232** (1999), 357–361.
8. Zagorodnyuk A.V. *On polynomial orthogonality on Banach spaces,* Math. Studii, **14**, 2 (2000), 189–192.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine

Received 03.09.2012

Лабачук О.В., Загороднюк А.В. *Мультиплікативні поліноміальні відображення на комутативних банахових алгебрах* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 284–288.

У цій роботі ми розглядаємо мультиплікативні поліноміальні відображення на комутативних алгебрах. Мультиплікативний поліном, що розкладається в добуток характерів, називатимемо тривіальним. Досліджуємо питання: чи існує нетривіальний мультиплікативний поліном на комутативній алгебрі?

Лабачук О.В., Загороднюк А.В. *Мультипликативные полиномиальные отображения на коммутативных банаховых алгебрах* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 284–288.

В этой работе мы рассматриваем мультипликативные полиномиальные отображение на коммутативных алгебрах. Мультипликативный полином, которой можна записать произведением характеров, назовем тривиальным. Исследуем вопрос: существует ли нетривиальный мультипликативный полином на коммутативной алгебре?

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.6

ОЛІЙНИК А.П., ШТАЄР Л.О.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ РЕЛАКСАЦІЇ НА ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОЇ ВЕРХНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Олійник А.П., Штаєр Л.О. *Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 289–296.

Визначено значення параметрів релаксації, які визначають оптимальну швидкість збіжності блочного методу послідовної верхньої релаксації для розв'язку задачі Діріхле в двовимірній прямокутній області, доведено збіжність ітераційних процедур та додатню визначеність матриці відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

ВСТУП

При вирішенні задач фільтрації рідини з урахуванням різних типів граничних умов виникає задача чисельного розв'язку задачі Діріхле з використанням методу релаксації за рядками [1]. В роботах [4, 5] робиться спроба вибору оптимальних параметрів релаксації, для яких встановлено умову $0 < \omega < 2$. Проте, в процесі практичної реалізації задачі встановлено, що вказані межі зміни параметра релаксації є досить загальними, в окремих випадках ($\omega \to 0; \omega \to 2$) ітераційний процес розв'язку задачі виявляється розбіжним, а встановлені в роботах [4, 5] значення $\omega_{opt} = 1,87$ призводять до розбіжності ітераційного процесу. Крім того, вказане в [4, 5] оптимальне значення ω_{opt}, яке є меншим з коренів рівняння $t^2\omega^2 - 16\omega + 16 = 0$, де $t = \cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q}$, а p та q — число відрізків, на які сітка розбиває кожну зі сторін прямокутника, в якому знаходиться розв'язок рівняння Лапласа при $p = q = 45$, як легко пересвідчитись прямим підрахунком, дорівнює $\omega_{opt} = 1,99$. В пропонованій роботі робиться спроба розробки методу оптимального вибору параметру релаксації для ітераційного методу розв'язання задачі Діріхле, досліджується залежність швидкості збіжності від типу граничних умов.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65N06, 11C20.
Ключові слова і фрази: задача Діріхле, ітераційний метод, параметр релаксації, визначник n-го порядку.

1 Постановка задачі

Задача оцінки швидкості фільтрації рідини в середовищі з опором вирішується шляхом чисельного розв'язання системи рівнянь фільтрації, яка в прямокутній області

$$G = \{0 \le x \le L; 0 \le y \le H\} \tag{1}$$

записується у вигляді [3] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ v = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{k\rho g}{\mu}, \end{cases} \tag{2}$$

де u, v – компоненти вектора швидкості фільтрації, p – тиск рідини; μ — динамічна в'язкість рідини, k – проникність рідини, g — прискорення земного тяжіння, ρ — густина рідини. Система (2) доповнюється граничними умовами:

$$p\left.\right|_{\partial G} = f(x, y), \tag{3}$$

де $f(x, y) \in C(G)$ — у випадку задачі стаціонарної фільтрації, та

$$p\left.\right|_{\partial G} = g(x, y), \tag{4}$$

де $g(x, y)$ – кусково-неперервна функція — у випадку фільтрації рідини через прямокутну область за наявності її витоків через бокову поверхню.

Твердження 1.1. *Задача (1)–(4) зводиться до задачі Діріхле відносно функції $p(x, y)$.*

Доведення. Диференціюючи друге рівняння системи (2) по x, а третє — по y, одержуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням рівняння нерозривності (першого рівняння системи (2)), одержуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) з граничними умовами (3) або (4) складає задачу Діріхле, що і завершує доведення твердження. □

2 Розробка та дослідження чисельного методу розв'язання задачі Діріхле

Для чисельного розв'язку задачі Діріхле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in G,$$

$$u\left.\right|_{\partial G} = f(x, y), f \in G(G), \tag{6}$$

або

$$u\left.\right|_{\partial G} = g(x, y), \tag{7}$$

де $g(x, y)$ — кусково-неперервна функція, використовується метод релаксації, розрахункова схема якого записується у вигляді:

$$u_{i,j}^{K+1} = (1-\omega)\, u_{i,j}^{K} + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)}\left[u_{i+1,j}^{K+1} + u_{i-1,j}^{K+1} + \beta^2\left(u_{i,j+1}^{K} + u_{i,j-1}^{K+1}\right)\right], \tag{8}$$

де ω — параметр релаксації, $0 < \omega < 2$ [1], $u_{i,j}^{K}$ — значення функції u в точці (x_i, y_j) на кроці ітераційної процедури за номером K. Рівняння (8) на кожному кроці ітераційної процедури містить три невідомі величини: $u_{i-1,j}^{K+1}$, $u_{i,j}^{K+1}$ та $u_{i+1,j}^{K+1}$. Величина $u_{i,j}^{K}$ є відомою з попереднього кроку ітераційної процедури, як і значення $u_{i,j+1}^{K}$. Величина $u_{i,j-1}^{K+1}$ є відомою з попереднього шару по координаті y. Таким чином, задаючи початкове наближення функції $u^0(x, y)$ з урахуванням граничних умов (6) або (7), що встановлюються за фізичною картиною процесу фільтрації з урахуванням особливостей фільтрації через бокову поверхню області G, одержується наступна система (для зручності запису не вказується верхній індекс — номер ітераційного процесу, а також індекс s — номер шару по y) алгебраїчних лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею:

$$\begin{cases} u_2 - Au_3 & = F_{2,s}; \\ -Au_2 + u_3 - Au_4 & = F_{3,s}; \\ \quad -Au_3 + u_4 - Au_5 & = F_{4,s}; \\ ----------- & \\ \qquad -Au_{I-2} + u_{I-1} & = F_{I-1,s}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$\begin{cases} F_{2,s} = (1-\omega)\, u_{2,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1+\beta^2)}\left[u_{2,s+1}^{K} + u_{2,s-1}^{K+1}\right] + Au\left.\right|_{\partial G}(0; s); \\ F_{i,s} = (1-\omega)\, u_{i,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1+\beta^2)}\left[u_{i,s+1}^{K} + u_{i,s-1}^{K+1}\right], i = 3, I-2; \\ F_{I-1,s} = (1-\omega)\, u_{I-1,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1+\beta^2)}\left[u_{I-1,s+1}^{K} + u_{I-1,s-1}^{K+1}\right] + Au\left.\right|_{\partial G}(I; s), \end{cases} \tag{10}$$

$A = \frac{\omega}{(1+\beta^2)2}$; $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, Δx — крок різницевої схеми по координаті x, Δy — крок ітераційної процедури по координаті y, I — кількість точок розбиття по x, s — номер шару по y. Величини (10) на кожному кроці ітераційної процедури є відомими. Схема розв'язання задачі є наступною:

— задається початкове наближення розв'язку $u^0(x,y)$;

— на кожному шарі по координаті y розв'язується система (9), в результаті чого за відомим $u^K(x,y)$ знаходиться наближення $u^{K+1}(x,y)$;

— якщо виконується умова:

$$\left|u^K(x_i,y_j)-u^{K+1}(x_i,y_j)\right|<\varepsilon,\forall(x_i,y_j),$$

де ε — заданий рівень точності, ітераційний процес припиняється.

Використовуючи пропоновану схему до системи (2), знаходимо розв'язок рівняння (5) з граничними умовами (3) або (4), після чого знаходиться поле швидкостей $\vec{V}(u,v)$ за відомим розподілом $p(x,y)$. Виникає питання дослідження збіжності ітераційного процесу, що базується на вирішенні задачі (9). Як відомо [2], якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь матриця $\tilde{A}$ – симетрична додатньо визначена матриця, то метод верхньої релаксації

$$(D+\omega A_1)\frac{x_{n+1}-x_n}{\omega}+\tilde{A}x_n=f,$$

де матриця системи A подається у вигляді:

$$\tilde{A}=D+A_1+A_2,$$

де A_1 — нижня трикутна матриця, A_2 — верхня трикутна матриця; D — діагональна матриця, є збіжним при умові $0<\omega<2$. Зокрема, метод Зейделя ($\omega=1$) збігається. Виникає питання в якій мірі вказаним умовам відповідає матриця системи (9).

Твердження 2.1. *Матриця системи* (9)

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0\\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0\\
0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -A & 1 & -A & | & 0 & 0 & 0\\
- & - & - & - & - & | & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -A & 1 & -A\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -A & 1
\end{array}\right), \tag{11}$$

де

$$A=\frac{\omega}{2(1+\beta^2)},\beta=\frac{\Delta x}{\Delta y}, \tag{12}$$

є симетричною додатньо визначеною матрицею.

Доведення. Симетричність матриці $\tilde{A}$ є очевидним фактом, оскільки $\forall i,j$ виконується умова:

$$\tilde{a_{ij}}=\tilde{a_{ji}}.$$

Необхідно перевірити додатню визначеність матриці, тобто, встановити, що будь-який головний мінор матриці $\tilde{A}$ є додатнім. З цією метою досліджується матриця (11) з умовами:

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta y\Rightarrow\beta=\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=1;\\ 0<\omega<2.\end{cases}$$

Розглянемо визначник матриці $\tilde{A}$:

$$\det\tilde{A}=\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & \\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & \\
0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & \\
0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & \\
- & - & - & - & - & | & - \; - & - \\
 & & & & & | & -A \;\; 1 & -A\\
 & & 0 & & & | & 0 \;\; -A & 1
\end{array}\right|, \tag{13}$$

Позначимо символом D_m головний мінор матриці $\tilde{A}$ порядку m. Тоді, очевидно, $\det\tilde{A}=D_n$, де n — порядок квадратної матриці $\tilde{A}$. Тоді:

$$D_n=\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & \\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & \\
0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & \\
0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & \\
- & - & - & - & - & | & - \; - & - \\
 & & 0 & & & | & -A \;\; 1 & -A\\
 & & (n\times n) & & & | & 0 \;\; -A & 1
\end{array}\right|$$

$$=1\times\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & \\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & \\
0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & \\
0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & \\
- & - & - & - & - & | & - \; - & - \\
 & & 0 & & & | & -A \;\; 1 & -A\\
 & & (n-1)\times(n-1) & & & | & 0 \;\; -A & 1
\end{array}\right| \tag{14}$$

$$+A\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & \\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & \\
0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & \\
0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & \\
- & - & - & - & - & | & - \; - & - \\
 & & 0 & & & | & -A \;\; 1 & -A\\
 & & & & & | & 0 \;\; -A & 1
\end{array}\right|,$$

де $(n\times n)$ — порядок відповідної матриці.

Формула (14) є формулою розкладу визначника за першим рядком. Застосовуючи цю ж формулу для першого стовбця визначника, що є другим доданком в (14), одержуємо:

$$
D_n = D_{n-1} + A\cdot(-A)\left|\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & -A & 0 & 0 & 0 & & & \\
-A & 1 & -A & 0 & 0 & & & \\
0 & -A & 1 & -A & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & -A & 1 & -A & & & \\
- & - & - & - & - & - & - & - \\
 & & 0 & & & -A & 1 & -A \\
 & & (n-2)\times(n-2) & & & 0 & -A & 1
\end{array}\right|
$$

$$= D_{n-1} - A^2 D_{n-2}.$$

Отже,

$$D_n = D_{n-1} - A^2 D_{n-2}. \tag{15}$$

Формула (15) є формулою для обчислення будь-якого головного мінора порядку n. З (13) встановлюється, що $D_1 = 1$; $D_2 = 1 = A^2$, тому будь-яке значення D_n визначається за рекурентною формулою (15), для значень переметра n, яке дорівнює кількості точок розбиття по координаті у прямокутної області G (1). В рамках допущень (12) одержується, що для величини D_n справедлива наступна оцінка (як для монотонної функції аргумента A):

$$\begin{cases}\beta = 1; \\ 0 < \omega < 2,\end{cases} \Rightarrow \frac{n+1}{2^n} \le D_n \le 1,$$

тобто, D_n — завжди додатня величина, причому значення $\frac{n+1}{2^n}$ — це значення D_n при $\omega = 2$; 1 — значення D_n при $\omega = 0$.

Справедливість цього твердження очевидна при $\omega = 0$, $A = 0$, і матриця $\tilde{A}$ є одиничною, якщо ж $\omega = 2$, то легко встановлюється рекурентна формула

$$D_n = \frac{n+1}{2^n}. \tag{16}$$

Проводячи розрахунки для $\omega = 2$ за формулою (15), пересвідчимось, що при $n = 1$ та при $n = 2$ формула (16) є вірною. Очевидно, $D_1 = 1$; $D_2 = 1 - A^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, тобто, формула (16) є вірною. Перевіримо, що (16) справедлива при $m = n$, якщо допустимо за методом математичної індукції, що (16) вірна для $m = n-1$ та $m = n-2$. Оскільки:

$$D_n = D_{n-1} + A^2 D_{n-2} = \frac{(n-1)+1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^2}\frac{(n-2)+1}{2^{n-2}} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^n} = \frac{2n-n+1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n},$$

тобто, (16) — вірна за методом математичної індукції. Таким чином, $\tilde{A}$ – додатньо визначена симетрична матриця, тому вказаний ітераційний процес збігається. □

3 Аналіз одержаних результатів дослідження збіжності

Результати розрахунків D_n для $n \le 50$ подано в таблиці 1.

Таблиця 1. Залежність значень головних мінорів матриці ітераційного процесу D_j, $j = 1, ..., N$ при різних значеннях параметра релаксації

N	значення параметра релаксації, $\omega =$				
	0,2	0,6	1,05	1,4	1,8
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9950	0,9550	0,8622	0,7550	0,5950
5	0,9900	0,9115	0,7386	0,5550	0,3130
7	0,9851	0,8700	0,6327	0,4077	0,1618
9	0,9801	0,8304	0,5420	0,2995	0,0835
11	0,9752	0,7926	0,4643	0,2200	0,0430
13	0,9703	0,7565	0,3978	0,1616	0,0222
15	0,9655	0,7221	0,3407	0,1187	0,0114
17	0,9607	0,6892	0,2919	0,0872	0,0059
19	0,9558	0,6578	0,2500	0,0641	0,0030
21	0,9511	0,6279	0,2142	0,0471	0,0016
23	0,9463	0,5993	0,1835	0,0346	0,0008
25	0,9416	0,5720	0,1572	0,0254	0,0004
27	0,9368	0,5459	0,1347	0,0187	0,0002
29	0,9322	0,5211	0,1154	0,0137	0,0001
31	0,9275	0,4974	0,0988	0,0101	0,0001
33	0,9228	0,4747	0,0847	0,0074	0,0000
35	0,9182	0,4531	0,0725	0,0054	0,0000
37	0,9136	0,4325	0,0621	0,0040	0,0000
39	0,9091	0,4128	0,0532	0,0029	0,0000
41	0,9045	0,3940	0,0456	0,0022	0,0000
43	0,9000	0,3760	0,0391	0,0016	0,0000
45	0,8955	0,3589	0,0335	0,0012	0,0000
47	0,8910	0,3426	0,0287	0,0009	0,0000
49	0,8865	0,3270	0,0245	0,0006	0,0000

Аналізуючи одержані результати, можна зробити висновок про те, що при $\omega \to 2$ доведена теоретично збіжність ітераційного методу при практичній реалізації може не досягатись, оскільки в такому випадку визначник матриці A при великих значеннях n наближається до нуля, що обумовлює погану збіжність ітераційного процесу, а, з урахуванням похибок округлення – до розбіжності методу. З іншого боку, при $\omega \to 0$ метод збігається дуже повільно, саме через те, що з переходом від кроку ітераційної процедури за номером K до кроку $K+1$ розв'язок змінюється мало через те, що $\det \tilde{A} \approx 1$, а матриця $\tilde{A}$ близька до одиничної. Проте, можна зробити висновок – при виборі значення ω необхідно враховувати величину числа n – тобто, кількість точок розбиття по координаті x – при значеннях $n \le 50$ задовільні результати при заданому рівні точності $\varepsilon = 10^{-4}$ одержуються при $0,8 < \omega < 1,25$. Залежність між кількістю ітерацій до збіжності та значенням ω подано в таблиці 2.

Таблиця 2. Залежність між кількістю ітерацій до збіжності та значенням параметра релаксації

Параметр релаксації	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Кількість ітерацій	9	8	7	7	6	6	5	5	5	5	6	19

Ще одним важливим висновком, який можна зробити за результатами дослідження збіжності ітераційного процесу, є залежність швидкості збіжності від типу граничних умов – так, в тих випадках, коли граничні умови вибираються у формі (3), швидкість збіжності в 2 рази більша, ніж у випадку розривних граничних умов (4).

Напрямки подальших досліджень визначаються необхідністю узагальнення вказаної методики на розв'язок задачі Пуасона – коли права частина (5) не дорівнює нулю, вивчення поведінки чисельного розв'язку задачі (5) з умовами (3) і (4) при реальних фізичних значеннях величин, що входять в математичні моделі (2)–(4) при більш складних, ніж (1) просторових конфігураціях областей.

Література

1. Андерсон Д., Таненхил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1. — М.: Мир, 1990. — 384 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
4. Frankel S.P. *Convergence Rates of Iterative Treatments of Partical Pifferential Equations*, Mathem. Tables and Other Aids to Computation, **4** (1950), 65–75.
5. Young D. *Iterative Methods for Solving Partial Difference equations of Elliptic Type*, Trans. Amer. Math. Soc., **76** (1954), 92–111.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *andrij-olijnyk@rambler.ru*

Надійшло 26.04.2012

Oliynyk A.P., Shtayer L.O. *The Dirichlet problem successive upper relaxation numerical method convergence relaxation parameters influence investigations*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 289–296.

The relaxation parameters values to definite sequential upper relaxation block method convergence optimal velocity have been determined for the Dirichlet's problem in two-dimensional rectangle spatial region, the iteration procedure convergence and positive definiteness of the corresponding linear algebraic equations system matrix have been proved.

Олийнык А.П., Штаер Л.Е. *Исследование влияния параметров релаксации на сходимость численного метода последовательной верхней релаксации для задачи Дирихле* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 289–296.

Определены значения параметров релаксации, которые определяют оптимальную скорость сходимости блочного метода последовательной верхней релаксации для решения задачи Дирихле в двухмерной прямоугольной области, доказана сходимость итерационных процедур и положительная определённость матрицы соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.956

Sadovyj D.Yu.

ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTION TO QUASILINEAR ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A TWO-LEVEL THICK JUNCTION OF TYPE 3:2:2

Sadovyj D.Yu. *Asymptotic approximation of solution to quasilinear elliptic boundary-value problem in a two-level thick junction of type 3:2:2*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 297–315.

We consider quasilinear elliptic boundary-value problem in a two-level thick junction Ω_ε of type 3 : 2 : 2, which is the union of a cylinder Ω_0 and a large number of ε-periodically situated thin discs with varying thickness. Different Robin boundary conditions with perturbed parameters are given on the surfaces of the thin discs. The leading terms of the asymptotic expansion are constructed and the corresponding estimate in Sobolev space is obtained.

Introduction

A thick junction of type $m : k : d$ is a union of some domain, which is called the junction's body, and a large number of ε-periodically alternating thin domains, which are attached to some manifold (the joint zone) on the boundary of the junction's body. The small parameter ε characterizes distance between neighboring thin domains and their thickness. The type $m : k : d$ of a thick junction refers, respectively, to the limiting dimensions (as $\varepsilon \to 0$) of the junction's body, the joint zone and each of the attached thin domains.

The subject of the investigation of boundary-value problems in thick junctions is the asymptotic behavior of solutions to such problems as $\varepsilon \to 0$, i.e. when the number of the attached thin domains infinitely increases and their thickness tends to zero.

The first researches in this direction were carried out in [9, 10, 14], where the convergence theorems for Green function of the Neumann problem for the Helmholz equation in the junction's body were proved. In these papers either the assumption about the convergence of certain components of the boundary-value problem was made, or explicit representations of

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B27, 35J65, 35B40, 35C20, 74K30.
Key words and phrases: homogenization, quasilinear problem, elliptic problem, asymptotic approximation, thick junction.
The author was partly supported by joint European grant EUMLS-FP7-People-2011-IRSES Project number 295164

Figure 1: Heat radiator that has form of a thick junction of type 3 : 2 : 2.

certain quantities were used, which was possible under certain configurations of the junction's body (the half-space). In [21]–[17], [23] thick junctions were classified, asymptotic methods for the investigation of main boundary-value problems of mathematical physics in thick junctions of different types were developed, the convergence theorems were proved, the first terms of asymptotic expansions were constructed, and the corresponding estimates were proved. It was shown that qualitative properties of solutions essentially depend on the junction's type and the conditions given on the boundaries of the attached thin domains (see also [2, 1, 18]).

As an extension of the investigation, in papers [5, 7, 22] thick junctions of more complicated geometric structure were considered, namely multi-level thick junctions. A multi-level thick junction is a thick junction, in which thin domains are divided into finitely many levels depending on their geometric structure and boundary conditions imposed on their surfaces. Besides, thin domains from each level ε-periodically alternate along the joint zone. In these papers linear boundary-value problems in thick junctions of types 2 : 1 : 1 and 3 : 2 : 1 were considered. Moreover, there a new qualitative difference in the asymptotic behavior of solutions to boundary-value problems in multi-level thick junctions was noticed, namely the "multi-phase" effect in the domain that is filled up simultaneously by the thin domains from different levels.

The successful applying in nanotechnology and microelectronics of constructions, which have form of thick junctions (see Fig. 1 and [11]–[13]), has lead to effective studying of boundary-value problems in thick junctions of various types and more complicated structure (see also [2]–[4], [16, 18]).

In the present paper we consider quasilinear parabolic boundary-value problem in a two-level thick junction of type 3 : 2 : 2, which consists of a cylinder Ω_0 and a large number of thin annular discs with varying thickness, which are ε-periodically attached to Ω_0. Different nonhomogeneous Robin boundary conditions are given on the surfaces of the thin discs from various levels. The leading terms of the asymptotic expansion for a solution to this problem are constructed and the asymptotic estimate in Sobolev space is proved.

The outline of the paper is as follows. In Section 1 thick junction Ω_ε is described and quasilinear elliptic boundary-value problem in this thick junction is stated. In Section 2 outer and inner asymptotic expansions for the solution u_ε are constructed and homogenized boundary-value problem is obtained. In Section 3 approximation function R_ε for solution

u_ε is constructed and asymptotic estimate is proved. In Section 4 the obtained results are discussed.

1 Statement of Problem

Let $0 < d_0 < d_2 \le d_1$ and $0 < b_2 < b_1 < 1$; $h_i : [d_0, d_i] \to (0, 1)$, $i = 1, 2$, are piecewise smooth functions. Suppose that functions h_i satisfy the following conditions:

$$0 < b_i - \frac{h_i(s)}{2},\ b_i + \frac{h_i(s)}{2} < 1 \quad \forall s \in [d_0, d_i],\ i = 1, 2, \qquad b_2 + \frac{h_2(s)}{2} < b_1 - \frac{h_1(s)}{2} \quad \forall s \in [d_0, d_2].$$

These inequalities imply that for all $s \in [d_0, d_i]$ the intervals

$$I_i(s) := \left(b_i - \frac{h_i(s)}{2},\ b_i + \frac{h_i(s)}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

belong to interval $(0, 1)$, don't have common points and don't adjoin.

We additionally assume that functions h_1, h_2 are constant in some neighborhood of d_0, i.e. there exists $\delta > 0$ such that $h_i(s) = h_i(d_0)$ for all $s \in [d_0, d_0 + \delta]$, $i = 1, 2$.

Consider a model thick junction Ω_ε of type 3 : 2 : 2 (see Fig. 2) that consists of cylinder

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_2 < l,\ r := \sqrt{x_1^2 + x_3^2} < d_0\}$$

and $2N$ thin annular discs

$$G_\varepsilon^{(1)}(j) = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x_2 - \varepsilon(j + b_1)| < \frac{\varepsilon h_1(r)}{2},\ d_0 \le r < d_1\},$$

$$G_\varepsilon^{(2)}(j) = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x_2 - \varepsilon(j + b_2)| < \frac{\varepsilon h_2(r)}{2},\ d_0 \le r < d_2\},$$

where $j = \overline{0, N-1}$, $\varepsilon = l/N$, i.e.

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon, \quad G_\varepsilon = G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}, \quad G_\varepsilon^{(1)} = \cup_{j=0}^{N-1} G_\varepsilon^{(1)}(j), \quad G_\varepsilon^{(2)} = \cup_{j=0}^{N-1} G_\varepsilon^{(2)}(j).$$

Here N is a large integer. Therefore, ε is a small parameter, which characterizes distance between neighboring thin discs and their thickness.

Denote by $S_\varepsilon^{(1)}$ and $S_\varepsilon^{(2)}$ the union of the lateral surfaces of the thin discs from the first and the second level, respectively, and by $S^\pm$ the bases of cylinder Ω_0, i.e.

$$S_\varepsilon^{(i)} := \{x \in \partial G_\varepsilon^{(i)} :\ |x_2 - \varepsilon(j + b_i)| = \varepsilon h_i(r)/2,\ j = \overline{0, N-1},\ r \in (d_0, d_i)\}, \quad i = 1, 2,$$

$$S^- = \{x \in \partial\Omega_0 :\ x_2 = 0\}, \quad S^+ = \{x \in \partial\Omega_0 :\ x_2 = l\}, \quad S^\pm = S^+ \cup S^-.$$

Also we introduce the following notations:

$$\overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_i, \quad D_i = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_2 < l,\ d_0 < r < d_i\},\ i = 1, 2,$$

$$Q_0^{(i)} = \{x \in \partial\Omega_i :\ r = d_i\},\ i = \overline{0, 2}, \quad Q_\varepsilon^{(i)} = \{x \in \partial G_\varepsilon^{(i)} :\ r = d_i\},\ i = 1, 2,$$

$$\Upsilon_\varepsilon^{(i)} = S_\varepsilon^{(i)} \cup Q_\varepsilon^{(i)}, \quad \Theta_\varepsilon^{(i)} = G_\varepsilon^{(i)} \cap \partial\Omega_0,\ i = 1, 2, \quad \Theta_\varepsilon = \Theta_\varepsilon^{(1)} \cup \Theta_\varepsilon^{(2)}, \quad Q_\varepsilon^{(0)} = Q_0^{(0)} \setminus \Theta_\varepsilon.$$

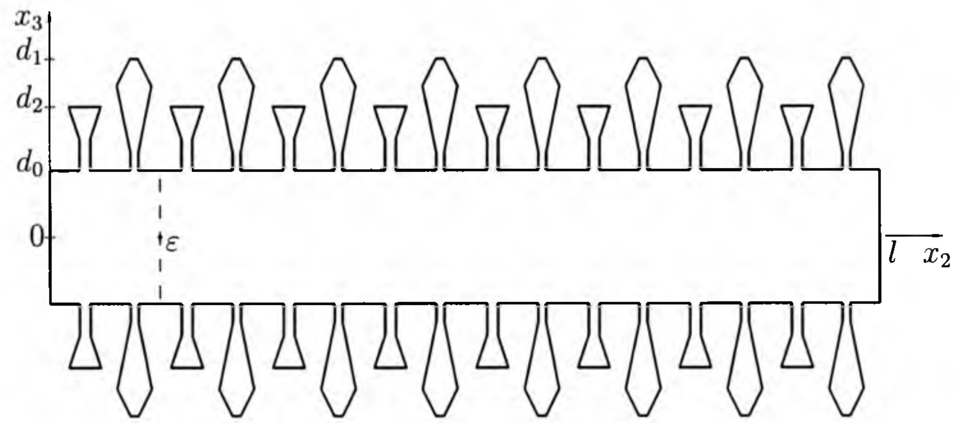

Figure 2: The cross-section of thick junction Ω_ε of type $3:2:2$ $(N=8)$.

In thick junction Ω_ε we consider the quasilinear elliptic boundary-value problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_\varepsilon + \vartheta_0(u_\varepsilon) &=& f_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon \vartheta_1(u_\varepsilon) &=& \varepsilon^\beta g_\varepsilon & \text{on } S_\varepsilon^{(1)}, \\ \partial_\nu u_\varepsilon + \vartheta_1(u_\varepsilon) &=& 0 & \text{on } Q_\varepsilon^{(1)}, \\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^\alpha \vartheta_2(u_\varepsilon) &=& \varepsilon^\beta g_\varepsilon & \text{on } \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \\ \partial_\nu u_\varepsilon &=& 0 & \text{on } Q_\varepsilon^{(0)}, \\ \partial_{x_2}^p u_\varepsilon|_{S^-} &=& \partial_{x_2}^p u_\varepsilon|_{S^+}, & p=0,\,1, \\ [u_\varepsilon]|_{r=d_0} = [\partial_r u_\varepsilon]|_{r=d_0} &=& 0 & \text{on } \Theta_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{1}$$

Here $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ is the outward normal derivative; $\alpha,\ \beta \geq 1$ are parameters; the square brackets denote the jump of the enclosed quantities. For the right-hand sides of problem (1) we assume that $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $g_\varepsilon \in H^1(D_1)$ and

$$\exists C_0 > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0): \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(D_1)} + \|\partial_{x_2} g_\varepsilon\|_{L^2(D_1)} \leq C_0.$$

Functions ϑ_i are Lipschitz-continuous (which is equal to $\vartheta_i \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) and

$$\exists c_1,\, c_2 > 0: \quad c_1 \leq \vartheta_i'(s) \leq c_2 \quad \text{for a.e. } s \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,\,2}. \tag{2}$$

Consider spaces $H_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon): \ \varphi|_{S^-} = \varphi|_{S^+}\}$.

A function $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ is a weak solution to problem (1) if for any function $\varphi \in H_\varepsilon$ the following integral identity holds:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + \vartheta_0(u_\varepsilon)\,\varphi)\,dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(1)}} \vartheta_1(u_\varepsilon)\,\varphi\,d\sigma_x + \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \vartheta_1(u_\varepsilon)\,\varphi\,d\sigma_x$$
$$+ \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \vartheta_2(u_\varepsilon)\,\varphi\,d\sigma_x = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\,\varphi\,dx + \varepsilon^\beta \int_{S_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon\,\varphi\,d\sigma_x. \tag{3}$$

By the same arguments as in [16] we can prove that for any fixed $\varepsilon > 0$ there exists a unique weak solution to problem (1).

The aim is to study the asymptotic behavior of the solution to problem (1) as $\varepsilon \to 0$, i.e. when the number of the attached thin discs infinitely increases and their thickness tends to zero.

2 Formal Asymptotic Expansions for the Solution

Only in this Section for formal calculations we assume that functions f_ε, g_ε do not depend on ε, i.e. $f_\varepsilon = f_0$ in Ω_1 and $g_\varepsilon = g_0$ in D_1, and they are smooth in $\overline{\Omega}_1$ and $\overline{D}_1$, respectively.

2.1 Outer Expansions

We seek the leading terms of the asymptotic expansion for solution u_ε, restricted to Ω_0, in the form

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0^+(x) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k u_k^+(x), \quad x \in \Omega_0, \tag{4}$$

and, restricted to the thin discs $G_\varepsilon^{(i)}(j)$, $j = \overline{0,\,N-1}$, in the form

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0^{i,-}(x) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k u_k^{i,-}(x,\,\xi_2 - j), \quad x \in G_\varepsilon^{(i)}(j), \quad i = 1,\,2, \tag{5}$$

where $\xi_2 = x_2/\varepsilon$.

Expansions (4) and (5) are usually called *outer expansions*.

With the help of Taylor's formula we get

$$\vartheta_0(u_\varepsilon(x)) = \vartheta_0(u_0^+(x)) + \vartheta_0'(\,\cdot\,) \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k u_k^+(x), \quad x \in \Omega_0. \tag{6}$$

Plugging the series (4) into the first equation of problem (1) and the boundary conditions on $S^\pm$, using (6) and collecting coefficients of the same powers of ε, we get the following relations for function u_0^+:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_0^+ + \vartheta_0(u_0^+) &=& f_0 & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_{x_2}^p u_0^+|_{S^-} &=& \partial_{x_2}^p u_0^+|_{S^+}, & p = 0,\,1. \end{array}\right.$$

Now let us find the limit relations in domains D_i, $i = 1,\,2$, which are filled up by the thin discs from i-th level as ε tends to zero. Assuming for a moment that functions $u_k^{i,-}$ are smooth, we write their Taylor series with respect to x_2 at the point $\varepsilon(j + b_i)$ and pass to the "rapid" variable $\xi_2 = x_2/\varepsilon$. Then (5) takes the form

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0^{i,-}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k V_k^{i,j}(\tilde{x},\,\xi_2), \quad x \in G_\varepsilon^{(i)}(j), \tag{7}$$

where $\tilde{x} := (x_1,\,x_3)$, and

$$V_k^{i,j}(\tilde{x},\,\xi_2) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\xi_2 - j - b_i)^m}{m!} \frac{\partial^m u_{k-m}^{i,-}}{\partial x_2^m}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3,\,\xi_2 - j)$$
$$+ \frac{(\xi_2 - j - b_i)^k}{k!} \frac{\partial^k u_0^{i,-}}{\partial x_2^k}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3). \tag{8}$$

Further we will indicate arguments of functions only if their absence may cause confusion.

The outward unit normal to the lateral surfaces of the thin discs except a set of zero measure is as follows:

$$\nu_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{1+4^{-1}\varepsilon^2|h_i'(r)|^2}}\left(-\frac{\varepsilon h_i'(r)x_1}{2r},\ \pm 1,\ -\frac{\varepsilon h_i'(r)x_3}{2r}\right),\quad x\in S_\varepsilon^{(i)},\ i=1,\,2,\qquad (9)$$

where "+" and "−" refer, respectively, to the left and the right parts of the lateral surface of each thin disc. Obviously, $(1+\varepsilon^2 4^{-1}|h_i'(r)|^2)^{-\frac12}=1+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0.$

Again with the help of Taylor's formula we obtain

$$\vartheta_0(u_\varepsilon(x))=\vartheta_0(u_0^{i,-}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3))+\vartheta_0'(\,\cdot\,)\sum_{k\ge1}\varepsilon^k V_k^{i,j}(\tilde x,\,\xi_2,\,t),\ x\in G_\varepsilon^{(i)}.\qquad (10)$$

Let us put (7) into (1) instead of u_ε. Taking into account (9), (10) and that the Laplace operator in the variables $(\tilde x,\,\xi_2)$ has the form $\Delta_x=\Delta_{\tilde x}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$ and collecting coefficients of the same powers of ε, we arrive at one-dimensional boundary-value problems with respect to ξ_2 for functions $V_k^{i,j}$.

Problems for $V_1^{i,j}$ read

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial^2_{\xi_2\xi_2}V_1^{i,j}&=&0,\ \ \xi_2\in I_{h_i(r)}(j):=(-\frac{h_i(r)}{2}+j+b_i,\ \frac{h_i(r)}{2}+j+b_i),\\ \partial_{\xi_2}V_1^{i,j}&=&0,\ \ \xi_2=\pm\frac{h_i(r)}{2}+j+b_i,\end{array}\right.\qquad (i=1,\,2)\qquad (11)$$

where $\partial_{\xi_2}=\frac{\partial}{\partial\xi_2}$, $\partial^2_{\xi_2\xi_2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$. Here the variables $\tilde x$ are regarded as parameters.

It follows from (11) that $V_1^{i,j}$ do not depend on ξ_2. Therefore, $V_1^{i,j}$ are equal to some functions $\varphi_1^{(i)}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3)$, $x\in G_\varepsilon^{(i)}(j)$, which will be defined later. Then, due to (8) we have

$$\begin{aligned}u_1^{i,-}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3,\,\xi_2-j)&=\varphi_1^{(i)}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3)\\&-(\xi_2-j-b_i)\partial_{x_2}u_0^{i,-}(x_1,\,\varepsilon(j+b_i),\,x_3),\quad x\in G_\varepsilon^{(i)}(j).\qquad (12)\end{aligned}$$

Boundary-value problems for $V_2^{1,j}$ and $V_2^{2,j}$ have the view

$$\left\{\begin{array}{ll}-\partial^2_{\xi_2\xi_2}V_2^{1,j}=(\Delta_{\tilde x}u_0^{1,-}-\vartheta_0(u_0^{1,-})+f_0)|_{x_2=\varepsilon(j+b_1)}, & \xi_2\in I_{h_1(r)}(j),\\ \pm\partial_{\xi_2}V_2^{1,j}=(2^{-1}\nabla_{\tilde x}h_1\cdot\nabla_{\tilde x}u_0^{1,-}-\vartheta_1(u_0^{1,-})+\delta_{\beta,1}g_0)|_{x_2=\varepsilon(j+b_1)}, & \xi_2=\pm\frac{h_1(r)}{2}+j+b_1,\end{array}\right.\qquad (13)$$

and

$$\left\{\begin{array}{ll}-\partial^2_{\xi_2\xi_2}V_2^{2,j}=(\Delta_{\tilde x}u_0^{2,-}-\vartheta_0(u_0^{2,-})+f_0)|_{x_2=\varepsilon(j+b_2)}, & \xi_2\in I_{h_2(r)}(j),\\ \pm\partial_{\xi_2}V_2^{2,j}=(2^{-1}\nabla_{\tilde x}h_2\cdot\nabla_{\tilde x}u_0^{2,-}-\delta_{\alpha,1}\vartheta_2(u_0^{2,-})+\delta_{\beta,1}g_0)|_{x_2=\varepsilon(j+b_2)}, & \xi_2=\pm\frac{h_2(r)}{2}+j+b_2,\end{array}\right.\qquad (14)$$

respectively, where $\delta_{\alpha,1}$, $\delta_{\beta,1}$ are Kronecker's symbols.

The solvability conditions for problems (13) and (14) read

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}_{\tilde x}(h_1\nabla_{\tilde x}u_0^{1,-})+h_1\vartheta_0(u_0^{1,-})+2\vartheta_1(u_0^{1,-})&=h_1f_0+2\delta_{\beta,1}g_0,\\ x_2=\varepsilon(j+b_1),\ r\in(d_0,\,d_1),&\qquad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}_{\tilde x}(h_2\nabla_{\tilde x}u_0^{2,-})+h_2\vartheta_0(u_0^{2,-})+2\delta_{\alpha,1}\vartheta_2(u_0^{2,-})&=h_2f_0+2\delta_{\beta,1}g_0,\\ x_2=\varepsilon(j+b_2),\ r\in(d_0,\,d_2),&\qquad (16)\end{aligned}$$

respectively.

Putting (7) into the Robin boundary conditions on $Q_\varepsilon^{(i)}$, we get

$$\begin{aligned}\partial_r u_0^{1,-}+\vartheta_1(u_0^{1,-})&=0,\quad x\in Q_\varepsilon^{(1)},\ x_2=\varepsilon(j+b_1),\qquad (17)\\ \partial_r u_0^{2,-}&=0,\quad x\in Q_\varepsilon^{(2)},\ x_2=\varepsilon(j+b_2).\qquad (18)\end{aligned}$$

In order to find conditions in joint zone $Q_0^{(0)}$ we use the method of matched asymptotic expansions for outer expansions (4), (7) and an inner expansion which will be constructed in the next subsection.

2.2 Inner Expansion

In a neighborhood of joint zone $Q_0^{(0)}$ we introduce the "rapid" coordinates $\xi=(\xi_1,\,\xi_2)$, where $\xi_1=-(r-d_0)/\varepsilon$ and $\xi_2=x_2/\varepsilon$. Here $(r,\,x_2,\,\theta)\in\mathbb{R}^3$ are cylindric coordinates: $r=\sqrt{x_1^2+x_3^2}$, $\tan(\theta)=x_3/x_1$. The Laplace operator in the coordinates $(\xi_1,\,\xi_2,\,\theta)$ has the form

$$\Delta_x=\varepsilon^{-2}\Delta_\xi-\varepsilon^{-1}\frac{1}{d_0-\varepsilon\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\frac{1}{(d_0-\varepsilon\xi_1)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.\qquad (19)$$

We seek the leading terms of the inner expansion in a neighborhood of $Q_0^{(0)}$ in the form

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x)\approx u_0^+(x)|_{r=d_0}&+\varepsilon\big(Z_1(\xi)\partial_{x_2}u_0^+(x)|_{r=d_0}\\&-(\eta(x_2)\Xi_1(\xi)+(1-\eta(x_2))\Xi_2(\xi))\partial_r u_0^+(x)|_{r=d_0}\big)+\ldots,\qquad (20)\end{aligned}$$

where Z_1, Ξ_1, Ξ_2 are some functions, which are 1-periodic with respect to ξ_2 and defined in the union $\Pi:=\Pi^+\cup\Pi_1^-\cup\Pi_2^-$ of semiinfinite strips

$$\Pi^+=\{\xi\in\mathbb{R}^2:\ \xi_1>0,\ \xi_2\in(0,\,1)\},\qquad \Pi_i^-=\{\xi\in\mathbb{R}^2:\ \xi_1\le 0,\ \xi_2\in I_i(d_0)\},\quad i=1,\,2,$$

(see definition of $I_i(d_0)$ in Section 1), η is some function, which will be defined from matching conditions.

Putting (20) into the differential equation of problem (1) with regard to (19) and into the corresponding boundary conditions and collecting coefficients of the same powers of ε, we get the junction-layer problems for functions Z_1, Ξ_1, Ξ_2. Functions Ξ_1 and Ξ_2 are solutions to the following homogeneous problem:

$$\left\{\begin{array}{rcll}-\Delta_\xi\Xi&=&0&\text{in }\Pi,\\ \partial_{\xi_2}\Xi&=&0&\text{on }(\partial\Pi_1^-\cup\partial\Pi_2^-)\cap\{\xi\in\mathbb{R}^2:\ \xi_1<0\},\\ \partial_{\xi_1}\Xi&=&0&\text{on }\partial\Pi\cap\{\xi\in\mathbb{R}^2:\ \xi_1=0\},\\ \partial^p_{\xi_2}\Xi|_{\xi_2=0}&=&\partial^p_{\xi_2}\Xi|_{\xi_2=1},&p=0,\,1,\ \xi_1>0.\end{array}\right.\qquad (21)$$

Main asymptotic relations for functions Ξ_1, Ξ_2 can be obtained from general results on the asymptotic behavior of solutions to elliptic problems in domains with different exits to infinity (see, for instance, [25]). However, for domain Π, we can define more exactly the asymptotic relations for junction-layer solutions Ξ_1, Ξ_2 in the same way as in papers [20, 15].

Proposition 2.1. *There exist two solutions Ξ_1, $\Xi_2 \in H^1_{\sharp,\mathrm{loc}}(\Pi)$ to problem (21), which have the following differentiable asymptotics:*

$$\Xi_1 = \begin{cases} \xi_1 + \mathcal{O}(\exp(-2\pi\xi_1)), & \xi_1 \to +\infty,\ \xi \in \Pi^+, \\ \alpha_1^{(1)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_1^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_1^-, \\ h_2^{-1}(d_0)\xi_1 + \alpha_1^{(2)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_2^-, \end{cases} \tag{22}$$

$$\Xi_2 = \begin{cases} \xi_1 + \mathcal{O}(\exp(-2\pi\xi_1)), & \xi_1 \to +\infty,\ \xi \in \Pi^+, \\ h_1^{-1}(d_0)\xi_1 + \alpha_2^{(1)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_1^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_1^-, \\ \alpha_2^{(2)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_2^-. \end{cases} \tag{23}$$

Here $H^1_{\sharp,\mathrm{loc}}(\Pi) = \{u : \Pi \to \mathbb{R} :\ u(\xi_1, 0) = u(\xi_1, 1)$ for any $\xi_1 > 0,\ u \in H^1(\Pi_R)$ for any $R > 0\}$, $\Pi_R = \{\xi \in \Pi :\ -R < \xi_1 < R\}$; $\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)},\ i = 1, 2$, are some fixed constants.

Any other solution to problem (21), which has a polynomial growth at infinity, can be represented as a linear combination $c_0 + c_1\Xi_1 + c_2\Xi_2$.

Function Z_1 is a solution to the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta_\xi Z &= 0 & \text{in } \Pi, \\ \partial_{\xi_2} Z &= -1 & \text{on } (\partial\Pi_1^- \cup \partial\Pi_2^-) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_1 < 0\}, \\ \partial_{\xi_1} Z &= 0 & \text{on } \partial\Pi \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_1 = 0\}, \\ \partial^p_{\xi_2} Z|_{\xi_2=0} &= \partial^p_{\xi_2} Z|_{\xi_2=1}, & p = 0, 1,\ \xi_1 > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Similarly to [20, 15, 24] it is easy to verify that there exists a unique solution $Z_1 \in H^1_{\sharp,\mathrm{loc}}(\Pi)$ with the following asymptotics:

$$Z = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\xi_1)), & \xi_1 \to +\infty,\ \xi \in \Pi^+, \\ -\xi_2 + b_1 + \alpha_3^{(1)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_1^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_1^-, \\ -\xi_2 + b_2 + \alpha_3^{(2)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}(d_0)\xi_1)), & \xi_1 \to -\infty,\ \xi \in \Pi_2^-. \end{cases} \tag{25}$$

Now let us verify matching conditions for outer expansions (4), (5) and inner expansion (20), namely, the leading terms of the asymptotics of the outer expansions as $\xi_1 \to \pm 0$ must coincide with the leading terms of the asymptotics of the inner expansion as $\xi_1 \to \pm\infty$. Near the point $(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3) \in Q_0^{(0)}$ function u_0^+ has the following asymptotics:

$$\begin{aligned} u_0^+(x) \approx{} & u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0} + \varepsilon(\xi_2 - j - b_i)\partial_{x_2} u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0} \\ & - \varepsilon\xi_1 \partial_r u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0} + \ldots \quad \text{as } \xi_1 \to 0+,\ (x) \in \Omega_0. \end{aligned}$$

Taking into account the asymptotics of Z_1, Ξ_1 and Ξ_2 as $\xi_1 \to +\infty$, we see that the matching conditions are satisfied for expansions (4) and (20).

The asymptotics of (5) in the neighborhood of $(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3) \in Q_0^{(0)}$ are equal to

$$\begin{aligned} & u_0^{i,-}(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0} + \varepsilon\big(\varphi_1^{(i)}(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0} \\ & - \xi_1 \partial_r u_0^{i,-}(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3)|_{r=d_0}\big) + \ldots \quad \text{as } \xi_1 \to 0-,\ x \in G_\varepsilon^{(i)}(j),\ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{26}$$

It follows from (22), (23) and (25) that the first terms of the asymptotics of (20) in the neighborhood of $(x_1,\ \varepsilon(j + b_i),\ x_3) \in Q_0^{(0)}$ are

$$\begin{aligned} & u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_1),\ x_3)|_{r=d_0} + \varepsilon\big(\alpha_3^{(1)}\partial_{x_2} u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_1),\ x_3)|_{r=d_0} \\ & - \big(\alpha_1^{(1)}\eta(\varepsilon(j + b_1)) + (h_1^{-1}(d_0)\xi_1 + \alpha_2^{(1)})(1 - \eta(\varepsilon(j + b_1)))\big)\partial_r u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_1),\ x_3)|_{r=d_0}\big) \\ & \qquad \text{as } \xi_1 \to -\infty,\ x \in G_\varepsilon^{(1)}(j), \end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned} & u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_2),\ x_3)|_{r=d_0} + \varepsilon\ \big(\alpha_3^{(2)}\partial_{x_2} u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_2),\ x_3)|_{r=d_0} \\ & - \big((h_2^{-1}(d_0)\xi_1 + \alpha_1^{(2)})\eta(\varepsilon(j + b_2)) + \alpha_2^{(2)}(1 - \eta(\varepsilon(j + b_2)))\big)\partial_r u_0^+(x_1,\ \varepsilon(j + b_2),\ x_3)|_{r=d_0}\big) \\ & \qquad \text{as } \xi_1 \to -\infty,\ x \in G_\varepsilon^{(2)}(j). \end{aligned} \tag{28}$$

Comparing the first terms of (26), (27) and (28), we get

$$u_0^+(x) = u_0^{i,-}(x), \quad x \in Q_0^{(0)},\ x_2 = \varepsilon(j + b_i),\ i = 1, 2. \tag{29}$$

Comparing the second terms of (26), (27) and (28), we find that

$$\varphi_1^{(i)}(x) = \alpha_3^{(i)}\partial_{x_2} u_0^+(x), \quad x \in Q_0^{(0)},\ x_2 = \varepsilon(j + b_i),\ i = 1, 2, \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned} (1 - \eta)h_1^{-1}(d_0)\partial_r u_0^+(x) &= \partial_r u_0^{1,-}(x), \quad x \in Q_0^{(0)},\ x_2 = \varepsilon(j + b_1) \\ \eta h_2^{-1}(d_0)\partial_r u_0^+(x) &= \partial_r u_0^{2,-}(x), \quad x \in Q_0^{(0)},\ x_2 = \varepsilon(j + b_2). \end{aligned} \tag{31}$$

Since the points $\{\varepsilon(j + b_i) :\ j = \overline{0, N-1}\}$, $i = 1, 2$, make up the ε-net of the segment $[0,\ l]$, we can extend equalities (12), (15), (16) in domains D_i, equalities (17), (18) in $Q_0^{(1)}$ and $Q_0^{(2)}$, respectively, and equalities (29), (30) and (31) in $Q_0^{(0)}$. As a result, from equalities (31) we derive the relation

$$\eta(x_2) = \frac{h_2(d_0)\partial_r u_0^{2,-}|_{r=d_0}}{h_1(d_0)\partial_r u_0^{1,-}|_{r=d_0} + h_2(d_0)\partial_r u_0^{2,-}|_{r=d_0}}, \quad x_2 \in (0,\ l),$$

and obtain

$$\partial_r u_0^+ = h_1(d_0)\partial_r u_0^{1,-} + h_2(d_0)\partial_r u_0^{2,-}, \quad x \in Q_0^{(0)}.$$

By virtue of (29) and (30) we can define $\varphi_1^{(i)}$ as follows:

$$\varphi_1^{(i)}(x) = \alpha_3^{(i)}\partial_{x_2} u_0^{i,-}(x), \quad x \in D_i,\ i = 1, 2.$$

2.3 The Homogenized Problem

With the help of the first terms u_0^+, $u_0^{1,-}$ and $u_0^{2,-}$ of asymptotic expansions (4) and (5) we define multi-sheeted function

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^{1,-}(x), & x \in D_1, \\ u_0^{2,-}(x), & x \in D_2, \end{cases}$$

or in a short form $\mathbf{U}_0 = (u_0^+,\, u_0^{1,-},\, u_0^{2,-})$. It follows from the foregoing that the components of function $\mathbf{U}_0$ must satisfy the relations

$$\begin{cases} -\Delta u_0^+ + \vartheta_0(u_0^+) &= f_0 & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_{x_2}^p u_0^+|_{S^-} &= \partial_{x_2}^p u_0^+|_{S^+}, & p = 0,\,1, \\ -\mathrm{div}_{\bar{x}}(h_1(r)\nabla_{\bar{x}} u_0^{1,-}) + h_1(r)\vartheta_0(u_0^{1,-}) & & \\ \qquad +2\vartheta_1(u_0^{1,-}) &= h_1(r) f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0 & \text{in } D_1, \\ \partial_\nu u_0^{1,-} + \vartheta_1(u_0^{1,-}) &= 0 & \text{on } Q_0^{(1)}, \\ -\mathrm{div}_{\bar{x}}\big(h_2(r)\nabla_{\bar{x}} u_0^{2,-}\big) + h_2(r)\vartheta_0(u_0^{2,-}) & & \\ \qquad +2\delta_{\alpha,1}\vartheta_2(u_0^{2,-}) &= h_2(r) f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0 & \text{in } D_2, \\ \partial_\nu u_0^{2,-} &= 0 & \text{on } Q_0^{(2)}, \\ u_0^+|_{Q_0^{(0)}} &= u_0^{1,-}|_{Q_0^{(0)}} = u_0^{2,-}|_{Q_0^{(0)}}, & \\ \partial_r u_0^+ &= h_1(d_0)\partial_r u_0^{1,-} + h_2(d_0)\partial_r u_0^{2,-} & \text{on } Q_0^{(0)}. \end{cases} \tag{32}$$

These relations form *the homogenized problem* for problem (1).

We introduce space $\mathcal{V}_0 := L^2(\Omega_0) \times L^2(D_1) \times L^2(D_2)$ of multi-sheeted functions with the scalar product

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}_0} = \int_{\Omega_0} u_0 v_0\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{D_i} u_i v_i\, dx,$$

where

$$\mathbf{u}(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in \Omega_0, \\ u_1(x), & x \in D_1, \\ u_2(x), & x \in D_2, \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}(x) = \begin{cases} v_0(x), & x \in \Omega_0, \\ v_1(x), & x \in D_1, \\ v_2(x), & x \in D_2, \end{cases}$$

or in a short form $\mathbf{u} = (u_0,\, u_1,\, u_2)$ and $\mathbf{v} = (v_0,\, v_1,\, v_2)$, belong to $\mathcal{V}_0$. Also we introduce anisotropic Sobolev space of multi-sheeted functions

$$\mathcal{H}_0 := \{\mathbf{u} = (u_0,\, u_1,\, u_2) \in \mathcal{V}_0 :\ u_0 \in H^1(\Omega_0),\ u_0|_{S^-} = u_0|_{S^+}; \\ \exists\, \partial_{x_j} u_i \in L^2(D_i),\ j = 1,\,3,\ i = 1,\,2;\ u_0|_{Q_0^{(0)}} = u_1|_{Q_0^{(0)}} = u_2|_{Q_0^{(0)}}\}$$

with the inner product

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_0} = \int_{\Omega_0} (\nabla u_0 \cdot \nabla v_0 + u_0 v_0)\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{D_i} (\nabla_{\bar{x}} u_i \cdot \nabla_{\bar{x}} v_i + u_i v_i)\, dx.$$

It is obvious that $\mathcal{H}_0$ is continuously embedded in $\mathcal{V}_0$.

A function $\mathbf{U}_0 = (u_0^+,\, u_0^{1,-},\, u_0^{1,-}) \in \mathcal{H}_0$ is a weak solution to problem (32) if for any function $\varphi = (\varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2) \in \mathcal{H}_0$ the integral identity

$$\int_{\Omega_0} (\nabla u_0^+ \cdot \nabla \varphi_0 + \vartheta_0(u_0^+)\, \varphi_0)\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{D_i} h_i(r)(\nabla_{\bar{x}} u_0^{i,-} \cdot \nabla_{\bar{x}} \varphi_i + \vartheta_0(u_0^{i,-})\, \varphi_i)\, dx$$

$$+2\int_{D_1} \vartheta_1(u_0^{1,-})\, \varphi_1\, dx + h_1(d_1) \int_{Q_0^{(1)}} \vartheta_1(u_0^{1,-})\, \varphi_1\, d\sigma_x + 2\delta_{\alpha,1} \int_{D_2} \vartheta_2(u_0^{2,-})\, \varphi_2\, dx$$

$$= \int_{\Omega_0} f_0 \varphi_0\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{D_i} (h_i f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0)\varphi_i\, dx$$

holds.

Using the properties of functions ϑ_i similarly as in [16] we can prove that there exists a unique weak solution to problem (32).

3 Approximation and Asymptotic Estimates

Let $\mathbf{U}_0 = (u_0^+,\, u_0^{1,-},\, u_0^{2,-})$ be the unique weak solution to problem (32). With the help of $\mathbf{U}_0$ and solutions $Z_1,\ \Xi_1,\ \Xi_2$ of junction-layer problems (21) and (24) we construct the main terms of expansions (4), (5) and (20). Consider smooth cut-off function $\chi_0(r)$, which is equal to 1 as $|r - d_0| < \delta_0/2$ and 0 as $|r - d_0| > \delta_0$, where $\delta_0 \in (0, \delta)$ is some fixed number. Matching the outer expansions with the inner expansion with the help of χ_0, we define approximation function R_ε:

$$R_\varepsilon(x) := R_\varepsilon^+(x) = u_0^+(x) + \varepsilon\, \chi_0(r)\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta), \quad x \in \Omega_0, \tag{33}$$

$$R_\varepsilon(x) := R_\varepsilon^{i,-}(x) = u_0^{i,-}(x) + \varepsilon \left(\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} u_0^{i,-}(x) + \chi_0(r)\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta)\right), \\ x \in G_\varepsilon^{(i)}(j), \quad i = 1,\, 2. \tag{34}$$

Here

$$\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta) = Z_1(\xi)\partial_{x_2} u_0^+|_{r=d_0} + \big(\xi_1 - \eta(x_2)\Xi_1(\xi) - (1 - \eta(x_2))\Xi_2(\xi)\big)\partial_r u_0^+|_{r=d_0},$$

$$\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta) = (Z_1(\xi) - \tilde{Y}_i(\xi_2))\partial_{x_2} u_0^+|_{r=d_0} \\ + \big(\mathcal{Y}_i(\xi_1,\, x_2) - \eta(x_2)\Xi_1(\xi) - (1 - \eta(x_2))\Xi_2(\xi)\big)\partial_r u_0^+|_{r=d_0},$$

where $\tilde{Y}_i(s) := -s + [s] + b_i + \alpha_3^{(i)}$, $[s]$ is the integer part of $s \in \mathbb{R}$, $i = 1,\, 2$, and

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(\xi_1,\, x_2) &:= h_1^{-1}(d_0)\xi_1(1 - \eta(x_2)), \\ \mathcal{Y}_2(\xi_1,\, x_2) &:= h_2^{-1}(d_0)\xi_1\eta(x_2), \end{aligned} \qquad \xi_1 \le 0,\ x_2 \in (0,\, l).$$

Obviously, $R_\varepsilon \in H_\varepsilon$.

Theorem 1. *Let $f_0 \in H^3(\Omega_1)$, $\partial_{x_2}^p f_0|_{S^-} = \partial_{x_2}^p f_0|_{S^+}$, $p = 0,\, 1$, $g_0 \in H^1(D_1)$.*

Then for any $\mu > 0$ there exist positive constants ε_0, c_0 such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ the difference between solution u_ε to problem (1) and approximation function R_ε defined by (33) and (34), where $\mathbf{U}_0 = (u_0^+,\, u_0^{1,-},\, u_0^{2,-})$ is a weak solution to problem (32), satisfies the inequality

$$\|u_\varepsilon - R_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_0\, (\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{1-\mu} + \varepsilon^{\delta_{\alpha,1}(2-\alpha)+\alpha-1} + \varepsilon^{\beta-1}\|g_\varepsilon - g_0\|_{L^2(D_1)}^{\delta_{\beta,1}}). \tag{35}$$

Proof. **Discrepancies in domain Ω_0.** It follows from the first two relations in (32) and from the theorem's assumptions that $\partial^2_{x_2x_2}u_0^+|_{S^-} = \partial^2_{x_2x_2}u_0^+|_{S^+}$. Then, according to the properties of Z_1, Ξ_1, Ξ_2 and u_0^+, function R_ε^+ satisfies the boundary conditions of problem (1) on $\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_0$.

Problems (21) and (24) imply

$$\Delta_\xi \mathcal{N}^+ = 0, \quad \Delta_\xi \mathcal{N}^{i,-} = 0 \qquad \xi \in \Pi,\ x_2 \in (0,\, l),\ \theta \in [0,\, 2\pi],\ i = 1,\, 2. \tag{36}$$

Let us consider the obvious equality

$$\Delta_{\tilde{x}}(\chi_0(r)\mathcal{N}) = \mathrm{div}_{\tilde{x}}(\mathcal{N}\nabla_{\tilde{x}}\chi_0(r)) + \nabla_{\tilde{x}}\chi_0(r)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\mathcal{N} + \chi_0(r)\Delta_{\tilde{x}}\mathcal{N}, \qquad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\xi,\, x_2,\, \theta). \tag{37}$$

Using (19), (32), (36) and (37), we get

$$\begin{aligned}
-\Delta R_\varepsilon^+(x) - f_\varepsilon(x) = f_0(x) - f_\varepsilon(x) - \vartheta_0(u_0^+(x)) + \chi_0(r)(r^{-1}\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta)\\
-2\partial^2_{\xi_2x_2}\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta)) - \varepsilon\,\mathrm{div}_{\tilde{x}}(\mathcal{N}^+|_{\xi_1=-(r-d_0)/\varepsilon}\nabla_{\tilde{x}}\chi_0(r)) + \chi_0'(r)\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta)\\
-\varepsilon\chi_0(r)\partial^2_{x_2x_2}\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta) - \varepsilon\, r^{-2}\chi_0(r)\,\partial^2_{\theta\theta}\mathcal{N}^+(\xi,\, x_2,\, \theta), \quad x \in \Omega_0.
\end{aligned} \tag{38}$$

We multiply (38) by a test function $\psi \in H_\varepsilon$, integrate by parts in Ω_0 and take into account the boundary conditions, satisfied by R_ε^+. This yields

$$\int_{\Omega_0}(\nabla R_\varepsilon^+\cdot\nabla\psi + \vartheta_0(R_\varepsilon^+)\psi)\,dx - \int_{\Theta_\varepsilon}\partial_r R_\varepsilon^+\psi\,d\sigma_x - \int_{\Omega_0} f_\varepsilon\psi\,dx = I_0^+(\varepsilon,\,\psi) + \ldots + I_4^+(\varepsilon,\,\psi), \tag{39}$$

where

$$\begin{aligned}
I_0^+(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{\Omega_0}(f_0 - f_\varepsilon)\psi\,dx,\\
I_1^+(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{\Omega_0}(\vartheta_0(R_\varepsilon^+) - \vartheta_0(u_0^+))\psi\,dx,\\
I_2^+(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{\Omega_0}\chi_0(r^{-1}\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+ - \partial^2_{x_2\xi_2}\mathcal{N}^+)\psi\,dx,\\
I_3^+(\varepsilon,\,\psi) &:= \varepsilon\int_{\Omega_0}\mathcal{N}^+\nabla_{\tilde{x}}\chi_0\cdot\nabla_{\tilde{x}}\psi\,dx + \int_{\Omega_0}\chi_0'\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+\psi\,dx,\\
I_4^+(\varepsilon,\,\psi) &:= \varepsilon\int_{\Omega_0}\chi_0\partial_{x_2}\mathcal{N}^+\partial_{x_2}\psi\,dx + \varepsilon\int_{\Omega_0} r^{-2}\chi_0\partial_\theta\mathcal{N}^+\partial_\theta\psi\,dx.
\end{aligned}$$

Discrepancies in the thin discs. One can readily check that

$$\begin{aligned}
\partial_r R_\varepsilon^{1,-} &= -\vartheta_1(u_0^{1,-}) - \varepsilon\tilde{Y}_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\vartheta_1(u_0^{1,-}), \quad x \in Q_\varepsilon^{(1)},\\
\partial_r R_\varepsilon^{2,-} &= 0, \qquad x \in Q_\varepsilon^{(2)},
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\partial_r R_\varepsilon^{i,-} = \varepsilon\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial^2_{rx_2}u_0^{i,-} + \partial_r R_\varepsilon^+, \quad x \in \Theta_\varepsilon^{(i)},\ i = 1,\, 2. \tag{41}$$

Taking into account (9) and that functions h_i are constant in a neighborhood of d_0, we derive that

$$\begin{aligned}
\partial_\nu R_\varepsilon^{i,-} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 4^{-1}\varepsilon^2|h_i'(r)|^2}}\left(\pm\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial^2_{x_2x_2}u_0^{i,-} \pm \chi_0\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathcal{N}^{i,-}|_{\xi_2=x_2/\varepsilon})\right.\\
\left.-\frac{1}{2}\nabla_{\tilde{x}}h_i\cdot\nabla_{\tilde{x}}(u_0^{i,-} + \varepsilon\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}u_0^{i,-})\right), \quad x \in S_\varepsilon^{(i)},\ i = 1,\, 2,
\end{aligned} \tag{42}$$

where "+" and "−" refer to the left and the right parts of the lateral surfaces of the thin discs, respectively.

Relations (19), (32), (36) and (37) yield

$$\begin{aligned}
-\Delta R_\varepsilon^{i,-}(x) - f_\varepsilon(x) = f_0(x) - f_\varepsilon(x) - \vartheta_0(u_0^{i,-})\\
+\chi_0(r)(r^{-1}\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta) - 2\partial^2_{\xi_2x_2}\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta)) - \varepsilon\mathrm{div}_{\tilde{x}}(\mathcal{N}^{i,-}|_{\xi_1=-(r-d_0)/\varepsilon}\nabla_{\tilde{x}}\chi_0(r))\\
+\chi_0'(r)\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta) - \varepsilon\chi_0(r)\partial^2_{x_2x_2}\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta) - \varepsilon\chi_0(r)r^{-2}\partial^2_{\theta\theta}\mathcal{N}^{i,-}(\xi,\, x_2,\, \theta)\\
+\nabla_{\tilde{x}}(\ln h_i(r))\cdot\nabla_{\tilde{x}}u_0^{i,-} - \varepsilon\mathrm{div}\big(\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\nabla(\partial_{x_2}u_0^{i,-})\big)\\
-2(1 - \delta_{i,2}(1 - \delta_{\alpha,1}))h_i^{-1}(r)\vartheta_i(u_0^{i,-}) + 2\delta_{\beta,1}h_i^{-1}(r)g_0(x), \quad x \in G_\varepsilon^{(i)}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Consider the integral identity

$$\int_{S_\varepsilon^{(i)}}\frac{\varepsilon h_i(r)}{2\sqrt{1 + 4^{-1}\varepsilon^2|h_i'(r)|^2}}\varphi\,d\sigma_x = \int_{G_\varepsilon^{(i)}}\varphi\,dx - \varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\varphi\,dx, \qquad i = 1,\, 2, \tag{44}$$

where $Y_i(s) = -s + [s] + b_i$ and $[s]$ is the integer part of s, $\varphi \in H^1(G_\varepsilon^{(i)})$ is an arbitrary function. We multiply (43) by a test function $\psi \in H_\varepsilon$ and integrate by parts in $G_\varepsilon^{(i)}$, using (44) and taking into account relations (40), (41), (42). This yields

$$\begin{aligned}
\int_{G_\varepsilon^{(1)}}(\nabla R_\varepsilon^{1,-}\cdot\nabla\psi + \vartheta_0(R_\varepsilon^{1,-})\psi)\,dx + \varepsilon\int_{S_\varepsilon^{(1)}}\vartheta_1(R_\varepsilon^{1,-})\psi\,d\sigma_x + \int_{Q_\varepsilon^{(1)}}\vartheta_1(R_\varepsilon^{1,-})\psi\,d\sigma_x\\
+\int_{\Theta_\varepsilon^{(1)}}\partial_r R_\varepsilon^+\psi\,d\sigma_x - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon\psi\,dx - \varepsilon^\beta\int_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\psi\,d\sigma_x = I_0^{1,-}(\varepsilon,\,\psi) + \ldots + I_7^{1,-}(\varepsilon,\,\psi)
\end{aligned} \tag{45}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_{G_\varepsilon^{(2)}}(\nabla R_\varepsilon^{2,-}\cdot\nabla\psi + \vartheta_0(R_\varepsilon^{1,-})\psi)\,dx + \varepsilon^\alpha\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\vartheta_2(R_\varepsilon^{2,-})\psi\,d\sigma_x + \int_{\Theta_\varepsilon^{(2)}}\partial_r R_\varepsilon^+\psi\,d\sigma_x\\
-\int_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon\psi\,dx - \varepsilon^\beta\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon\psi\,d\sigma_x = I_0^{2,-}(\varepsilon,\,\psi) + \ldots + I_7^{2,-}(\varepsilon,\,\psi)
\end{aligned} \tag{46}$$

for all $\psi \in H_\varepsilon$, where

$$\begin{aligned}
I_0^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{G_\varepsilon^{(i)}}(f_0 - f_\varepsilon)\psi\,dx,\\
I_1^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{G_\varepsilon^{(i)}}(\vartheta_0(R_\varepsilon^{i,-}) - \vartheta_0(u_0^{i,-}))\psi\,dx,\\
I_2^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \int_{G_\varepsilon^{(i)}}\chi_0(r^{-1}\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-} - \partial^2_{x_2\xi_2}\mathcal{N}^{i,-})\psi\,dx,\\
I_3^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}}\mathcal{N}^{i,-}\nabla_{\tilde{x}}\chi_0\cdot\nabla_{\tilde{x}}\psi\,dx + \int_{G_\varepsilon^{(i)}}\chi_0'\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-}\psi\,dx,\\
I_4^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}}\chi_0\partial_{x_2}\mathcal{N}^{i,-}\partial_{x_2}\psi\,dx + \varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}} r^{-2}\chi_0\partial_\theta\mathcal{N}^{i,-}\partial_\theta\psi\,dx,\\
I_5^{i,-}(\varepsilon,\,\psi) &:= \varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}(\psi\nabla_{\tilde{x}}u_0^{i,-}\cdot\nabla_{\tilde{x}}\ln h_i)\,dx\\
&\quad+\varepsilon\int_{G_\varepsilon^{(i)}}\tilde{Y}_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\nabla(\partial_{x_2}u_0^{i,-})\cdot\nabla\psi\,dx, \qquad i = 1,\, 2,
\end{aligned}$$

$$I_6^{1,-}(\varepsilon,\,\psi) := -\varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(1)}} \frac{\vartheta_1(u_0^{1,-})\psi}{\sqrt{1+4^{-1}\varepsilon^2|h_1'(r)|^2}}\,d\sigma_x - 2\varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) h_1^{-1}\partial_{x_2}(\vartheta_1(u_0^{1,-})\psi)\,dx$$

$$+\varepsilon\int_{S_\varepsilon^{(1)}} \vartheta_1(R_\varepsilon^{1,-})\psi\,d\sigma_x + \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \left(\vartheta_1(R_\varepsilon^{1,-}) - \vartheta_1(u_0^{1,-}) - \varepsilon\tilde{Y}_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}\vartheta_1(u_0^{1,-})\right)\psi\,d\sigma_x,$$

$$I_6^{2,-}(\varepsilon,\,\psi) := -\varepsilon\delta_{\alpha,1} \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \frac{\vartheta_2(u_0^{2,-})\psi}{\sqrt{1+4^{-1}\varepsilon^2|h_2'(r)|^2}}\,d\sigma_x$$

$$-2\varepsilon\delta_{\alpha,1}\int_{G_\varepsilon^{(2)}} Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) h_2^{-1}\partial_{x_2}(\vartheta_2(u_0^{2,-})\psi)\,dx + \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \vartheta_2(R_\varepsilon^{2,-})\psi\,d\sigma_x,$$

$$I_7^{1,-}(\varepsilon,\,\psi) := \varepsilon\delta_{\beta,1}\int_{S_\varepsilon^{(1)}} \frac{g_0\psi}{\sqrt{1+4^{-1}\varepsilon^2|h_1'(r)|^2}}\,d\sigma_x$$

$$+2\varepsilon\delta_{\beta,1}\int_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) h_1^{-1}\partial_{x_2}(g_0\psi)\,dx - \varepsilon^\beta\int_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\psi\,d\sigma_x,$$

$$I_7^{2,-}(\varepsilon,\,\psi) := \varepsilon\delta_{\beta,1}\int_{S_\varepsilon^{(2)}} \frac{g_0\psi}{\sqrt{1+4^{-1}\varepsilon^2|h_2'(r)|^2}}\,d\sigma_x$$

$$+2\varepsilon\delta_{\beta,1}\int_{G_\varepsilon^{(2)}} Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) h_2^{-1}\partial_{x_2}(g_0\psi)\,dx - \varepsilon^\beta\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon\psi\,d\sigma_x.$$

Asymptotic estimates. After summing (39), (45) and (46) we see that function R_ε defined by (33) and (34) satisfies the integral identity

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla R_\varepsilon\cdot\nabla\psi + \vartheta_0(R_\varepsilon)\psi)\,dx + \varepsilon\int_{S_\varepsilon^{(1)}} \vartheta_1(R_\varepsilon)\psi\,d\sigma_x + \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \vartheta_1(R_\varepsilon)\psi\,d\sigma_x$$
$$+\varepsilon^\alpha\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \vartheta_2(R_\varepsilon)\psi\,d\sigma_x - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\psi\,dx - \varepsilon^\beta\int_{S_\varepsilon^{(1)}\cup\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon\psi\,d\sigma_x = F_\varepsilon(\psi) \quad (47)$$

for any $\psi\in H_\varepsilon$, where $F_\varepsilon(\psi) := I_0^\pm + \ldots + I_4^\pm + I_5^- + I_6^- + I_7^-$, $I_k^- := I_k^{1,-} + I_k^{2,-}$, $k=\overline{0,7}$, $I_m^\pm := I_m^+ + I_m^-$, $m=\overline{0,4}$.

It follows from (3) and (47) that

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla(R_\varepsilon - u_\varepsilon)\cdot\nabla\psi + (\vartheta_0(R_\varepsilon) - \vartheta_0(u_\varepsilon))\psi)\,dx + \varepsilon\int_{S_\varepsilon^{(1)}} (\vartheta_1(R_\varepsilon) - \vartheta_1(u_\varepsilon))\psi\,d\sigma_x$$
$$+\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} (\vartheta_1(R_\varepsilon) - \vartheta_1(u_\varepsilon))\psi\,d\sigma_x + \varepsilon^\alpha\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} (\vartheta_2(R_\varepsilon) - \vartheta_2(u_\varepsilon))\psi\,d\sigma_x = F_\varepsilon(\psi) \quad (48)$$

for all $\psi\in H_\varepsilon$.

Now we are going to estimate $F_\varepsilon(\psi)$.

With the help of Cauchy-Schwartz-Bunyakovskii inequality we obtain

$$|I_0^\pm(\varepsilon,\,\psi)| \le \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Remark 3.1. *Here and further all constants c_i, C_i in asymptotic estimates are independent of ε.*

With the help of (2), Taylor's formula and Cauchy-Schwartz-Bunyakovskii inequality we derive that

$$|I_1^+(\varepsilon,\,\psi)| = \varepsilon\left|\int_{\Omega_0}\vartheta_0'(\,\cdot\,)\chi_0\mathcal{N}^+\psi\,dx\right| \le \varepsilon c_0\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Similarly we estimate I_1^-. Thus, $|I_1^\pm(\varepsilon,\,\psi)| \le \varepsilon C_1\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Since functions $\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+$, $\partial^2_{x_2\xi_2}\mathcal{N}^+$, $\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-}$, $\partial^2_{x_2\xi_2}\mathcal{N}^{i,-}$ exponentially decrease as $|\xi_1|\to\infty$ (see (22), (23) and (25)), then from Lemma 3.1 in [6] we derive that

$$\forall\mu>0\quad\exists C_2>0\quad\exists\varepsilon_0>0\quad\forall\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0):\quad |I_2^\pm(\varepsilon,\,\psi)| \le \varepsilon^{1-\mu}C_2\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

The integrals in $I_3^\pm(\varepsilon,\,\psi)$ are in fact over

$$\mathrm{supp}(\chi_0'(r))\cap\Omega_\varepsilon = \{x\in\Omega_\varepsilon:\ \ \delta_0/2 < |r-d_0| < \delta_0\},$$

where, according to (21) and (24), functions $\mathcal{N}^+$, $\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^+$, $\partial_{\xi_1}\mathcal{N}^{i,-}$ are exponentially small, and function $\mathcal{N}^{i,-}$ can be estimated by some constant c_1. Thus,

$$|I_3^\pm(\varepsilon,\,\psi)| \le \varepsilon C_3\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

The integrals in $I_4^\pm$ are over $\{x\in\mathbb{R}^3:\ |r-d_0|<\delta_0\}$ and they can be estimated, extracting if necessary the exponentially decreasing part in the corresponding integrand and then using Cauchy-Schwartz-Bunyakovskii inequality. Consider, for example, the integral

$$\left|\int_{G_\varepsilon^{(1)}}\chi_0\partial_{x_2}\mathcal{N}^{1,-}\partial_{x_2}\psi\,dx\right| = \left|\int_{G_\varepsilon^{(1)}}\chi_0\Big((Z_1-\tilde{Y}_1)\partial^2_{x_2x_2}u_0^+|_{r=d_0}\right.$$
$$-(h_1^{-1}(d_0)\xi_1 + \Xi_1 - \Xi_2)\eta'\partial_r u_0^+|_{r=d_0}$$
$$\left.+(h_1^{-1}(d_0)\xi_1(1-\eta) - \eta\Xi_1 - (1-\eta)\Xi_2)\partial^2_{x_2r}u_0^+|_{r=d_0}\Big)\partial_{x_2}\psi\,dx\right|$$
$$\le c_2\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\left(\sqrt{\int_0^T\int_{G_\varepsilon^{(1)}}\chi_0|Z_1-\tilde{Y}_1|^2\,dxdt}\right.$$
$$+\|\alpha_1^{(1)}\eta + \alpha_2^{(1)}(1-\eta) + (\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)})\eta'\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})}$$
$$+\sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}}\chi_0|h_1^{-1}(d_0)\xi_1 + (\Xi_1-\alpha_1^{(1)}) - (\Xi_2-\alpha_2^{(1)})|^2\,dx}$$
$$\left.+\sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}}\chi_0|\eta(\Xi_1-\alpha_1^{(1)}) + (1-\eta)(\Xi_2 - h_1^{-1}(d_0)\xi_1 - \alpha_2^{(1)})|^2\,dx}\right)$$
$$\le c_3\,\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\left(\sqrt{2\pi l d_0\varepsilon}\|Z_1-\tilde{Y}_1\|_{L^2(\Pi_1^-)} + \sqrt{|G_\varepsilon^{(1)}|}\right.$$
$$+\sqrt{2\pi l d_0\varepsilon}\,\|h_1^{-1}(d_0)\xi_1 + (\Xi_1-\alpha_1^{(1)}) - (\Xi_2-\alpha_2^{(1)})\|_{L^2(\Pi_1^-)}$$
$$\left.+\sqrt{2\pi l d_0\varepsilon}\,\|\eta(\Xi_1-\alpha_1^{(1)}) + (1-\eta)(\Xi_2 - h_1^{-1}(d_0)\xi_1 - \alpha_2^{(1)})\|_{L^2(\Pi_1^-)}\right),$$

where $|G_\varepsilon^{(1)}|$ is the measure of $G_\varepsilon^{(1)}$. Relations (22), (23) and (25) show that the norms in the right-hand side of the last inequality are bounded in ε. Similarly we can estimate the rest of the integrals in $I_4^{\pm}(\varepsilon, \psi)$. As a result, we obtain

$$|I_4^{\pm}(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon C_5 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Remark 3.2. *Constants C_3 and C_4 depend on*

$$\sup_{x \in Q_0^{(0)},\ t \in (0,T)} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} u_0^{+}(x) \right|, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \le 2,\ \alpha_k \ge 0,\ k = \overline{1, 3}.$$

Extending homogenized problem (32) periodically in x_2 through the planes $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = l\}$ and taking into account the assumptions for f_0 and g_0, by virtue of classical results on the smoothness of solutions to boundary-value problems we conclude that these quantities are bounded.

Since f_0 is smooth, then $\partial_{x_2} u_0^{i,-} \in H^1(D_i),\ i = 1, 2$. Consequently,

$$|I_5^-(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon c_4 \sum_{i=1}^{2} (\|u_0^{i,-}\|_{H^1(D_i)} + \|\partial_{x_2} u_0^{i,-}\|_{H^1(D_i)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le \varepsilon C_5 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

In order to estimate I_6^- we consider summand $I_6^{2,-}$ when $\alpha = 1$. Obviously, the second integral in $I_6^{2,-}$ can be estimated by $\varepsilon c_5 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Using Taylor's formula and obvious equality

$$1 - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + a} \qquad (a^2 + a \ne 0)$$

we derive that the sum of the first and the third integrals in $I_6^{2,-}$ is equal to

$$4^{-1}\varepsilon^3 \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \frac{|h_2'(r)|^2\, \vartheta_2(u_0^{2,-})\psi}{1 + 4^{-1}\varepsilon^2 |h_2'(r)|^2 + \sqrt{1 + 4^{-1}\varepsilon^2 |h_2'(r)|^2}}\, d\sigma_x$$

$$\varepsilon^2 \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \vartheta_2'(\,\cdot\,)(\tilde{Y}_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} u_0^{2,-} + \chi_0 \mathcal{N}^{2,-})\psi\, dx + \varepsilon \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} \vartheta_2(R_\varepsilon)\psi\, d\sigma_x$$

$$=: J_1(\varepsilon, \psi) + J_2(\varepsilon, \psi) + J_3(\varepsilon, \psi).$$

With the help of (2) and (44) we obtain $|J_1(\varepsilon, \psi) + J_2(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon c_6 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Taking into account (2), properties of the trace operator and the fact that f_0 is smooth, we get $|J_3(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon c_7 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Thus, in case $\alpha = 1$ we have

$$|I_6^{2,-}(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon c_8 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

In case $\alpha > 1$ with the help of (44) we obtain $|I_6^{2,-}(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon^{\alpha - 1} c_9 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Similarly to $I_6^{2,-}(\varepsilon, \psi)$, we estimate $I_6^{1,-}(\varepsilon, \psi)$ and $I_7^-(\varepsilon, \psi)$. As a result, we get

$$|I_6^{1,-}(\varepsilon, \psi)| \le \varepsilon C_6 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

and

$$|I_7^-(\varepsilon, \psi)| \le C_7 \begin{cases} (\varepsilon + \|g_0 - g_\varepsilon\|_{L^2(D_1)})\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, & \beta = 1, \\ \varepsilon^{\beta - 1}\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, & \beta > 1. \end{cases}$$

Thus,

$$|F_\varepsilon(\psi)| \le C_8 \left(\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{1-\mu} + \varepsilon^{\delta_{\alpha,1}(2-\alpha)+\alpha-1} + \varepsilon^{\beta-1}\|g_\varepsilon - g_0\|_{L^2(D_1)}^{\delta_{\beta,1}}\right)\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (49)$$

where $\mu > 0$ is an arbitrary number. Setting in (48) $\psi := R_\varepsilon - u_\varepsilon$ and using (49) and obvious inequality

$$(\vartheta_i(s_1) - \vartheta_i(s_2))(s_1 - s_2) \ge c_1(s_1 - s_2)^2 \qquad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, 2},$$

which follows from (2), we obtain estimate (35). □

4 DISCUSSION OF THE OBTAINED RESULTS

As we can see from the obtained results, the homogenized problem (32) for problem (1) is a nonstandard boundary-value problems for multi-sheeted function $\mathbf{U}_0$ in anisotropic Sobolev space $\mathcal{H}_0$ (see Section 2.3). This problem consists of three boundary-value problems (in domains Ω_0 and $D_i,\ i = 1, 2$), connected with each other by the conjugation conditions (on $Q_0^{(0)}$).

The nonhomogeneous Robin boundary conditions on the lateral surfaces of the thin discs in problem (1) are transformed as $\varepsilon \to 0$ into new summands in the differential equations in domains $D_i,\ i = 1, 2$, in problem (32). These summands show us the influence of the perturbed parameters α and β. If $\alpha > 1$, then summand $2\delta_{\alpha,1}\vartheta_1(u_0^{2,-})$ vanishes. From physical point of view this means that the outer heat conduction coefficient is too small, and we can neglect this heat exchange. If $\beta > 1$, then summands $2\delta_{\beta,1} g_0$ vanish, which means that the temperature of the environment is too small, and we can consider it equal to zero.

Also functions $h_i,\ i = 1, 2$, which describe the relative thickness of the thin discs from the i-th level, are transformed into the coefficients of the differential equations in domains D_i, respectively. The variable x_2 is involved as a parameter in the boundary-value problems in $D_i,\ i = 1, 2$, which shows us the influence of the type of thick junction Ω_ε on the asymptotic behavior of solution u_ε.

From results proved in the present paper it follows that for applied problems in thick junctions we can use the homogenized problem (32), which is simpler, instead of the initial problem (1) with sufficient plausibility.

Acknowledge

The author is grateful to professor T. A. Mel'nyk for the statement of problem, attention during it's solving and discussion of obtained results.

REFERENCES

1. Blanchard D., Gaudiello A., Griso G. *Junction of a Periodic Family of Elastic Rods with 3d Plate*, J. Math. Pures Appl., **88**, 9 (2007), 1-33 (Part I); J. Math. Pures Appl., **88**, 9 (2007), 149–190 (Part II).

2. Blanchard D., Gaudiello A., Mel'nyk T.A. *Boundary Homogenization and Reduction of Dimension in a Kirchhoff-Love Plate*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **39**, 6 (2008), 1764–1787.

3. Blanchard D., Gaudiello A., Mossino J. *Highly Oscillating Boundaries and Reduction of Dimension: the Critical Case*, Analysis and Application, **5** (2007), 137–163.

4. Chechkin G.A., Mel'nyk T.A. *Asymptotics of Eigenelements to Spectral Problem in Thick Cascade Junction with Concentrated Masses*, Applicable Analysis; `http://www.tandfonline.com/doi/abs/DOI: 10.1080/00036811.2011.602634`

5. De Maio U., Durante T., Mel'nyk T.A. *Asymptotic Approximation for the Solution to the Robin Problem in a Thick Multi-Level Junction*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M^3AS), **15**, 12 (2005), 1897–1921.

6. De Maio U., Mel'nyk T.A. *Asymptotic Solution to a Mixed Boundary-Value Problem in a Thick Multi-Structure of Type* 3 : 2 : 2, Ukrainian Mathematical Bulletin, **2**, 4 (2005), 467–485.

7. Durante T., Mel'nyk T.A. *Asymptotic Analysis of a Parabolic Problem in a Thick Two-Level Junction*, Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry, **3**, 3 (2007), 313–341.

8. Gaevsky H., Greger K., Zakharias K. Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations, Mir, Moscow, 1975. (in Russian)

9. Khruslov E.Ya. *On the Resonance Phenomenas in One Problem of Diffraction*, Teor. Funkts., Funkts. Anal. i Prilozhen., **10** (1968), 113–120. (in Russian)

10. Kotliarov V.P., Khruslov E.Ya. *On a Limit Boundary Condition of Some Neumann Problem*, Teor. Funkts., Funkts. Anal. i Prilozhen., **10** (1970), 83–96. (in Russian)

11. Lavrentovich Y.I., Knyzkova T.V., Pidlisnyuk V.V. *The Potential of Application of New Nanostructural Materials for Degradation of Pesticides in Water*, Proceedings of the 7th International HCH and Pesticides Forum "Towards the establishment of an obsolete POPS/pecticides stockpile fund for Central and Eastern European countries and new independent states". Kyiv, 2003, 167–169.

12. Lenczner M. *Multiscale Model for Atomic Force Microscope Array Mechanical Behavior*, Applied Physics Letters, **90** (2007), 901–908.

13. Lyshevshi S.E. Mems and Nems: Systems, Devices, and Structures, CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.

14. Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Boundary Value Problems in Domains with Finegrained Boundary, Naukova Dumka, Kiev, 1974. (in Russian)

15. Mel'nyk T.A. *Homogenization of the Poisson Equation in a Thick Periodic Junction*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **18**, 4 (1999), 953–975.

16. Mel'nyk T.A. *Homogenization of a Boundary-Value Problem with a Nonlinear Boundary Condition in a Thick Junction of Type 3:2:1*, Math. Models Meth. Appl. Sci., **31** (2008), 1005–1027.

17. Mel'nyk T.A. *Homogenization of a Singularly Perturbed Parabolic Problem in a Thick Periodic Junction of the Type 3:2:1*, Ukr. Math. Journal, **52**, 11 (2000), 1737–1748.

18. Mel'nyk T.A., Chechkin G.A. *Homogenization of a Boundary-Value Problem in a Thick 3-dimensional Multi-Level Junction*, Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics., **200**, 3 (2009), 357–383.

19. Mel'nyk T.A., Nazarov S.A. *Asymptotic Analysis of the Neumann Problem of the Junction of a Body and Thin Heavy Rods*, St.-Petersburg Math. J., **12**, 2 (2001), 317–351.

20. Mel'nyk T.A., Nazarov S.A. *Asymptotics of the Neumann Spectral Problem Solution in a Domain of "Thick Comb"*, Tr. Sem. im. I. G. Petrovskogo, **19** (1996), 138–174. (in Russian)

21. Mel'nyk T.A., Nazarov S.A. *The Asymptotic Structure of the Spectrum in the Problem of Harmonic Oscillations of a Hub with Heavy Spokes* Russ. Acad. Sci. Dokl., Math., **48**, 3 (1994), 428–432.

22. Mel'nik T.A., Vashchuk P.S. *Homogenization of a Boundary-Value Problem with Mixed Type of Boundary Conditions in a Thick Junction*, Partial Differential Equations, **43**, 5 (2007), 677–684.

23. Nazarov S.A. *Junctions of Singularly Degenerating Domains with Different Limit Dimension*, Tr. Sem. im. I. G. Petrovskogo, **18** (1995), 1-78 (Part I); Tr. Sem. im. I. G. Petrovskogo, **20** (2000), 155–196 (Part II). (in Russian)

24. Nazarov S.A. *The Polynomial Property Selfadjoint Elliptic Boundary-Value Problems and Algebraic Description Their Atributes*, Usp. Mat. Nauk, **54**, 5 (1999), 77–142. (in Russian)

25. Nazarov S.A., Plamenevskii B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

Taras Shevchenko National University,
Kyiv, Ukraine
e-mail: *sadovyj@univ.kiev.ua*

Received 8.05.2012

Садовий Д.Ю. *Асимптотична апроксимація розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в дворівневому густому з'єднанні типу 3:2:2* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 297–315.

Розглядається квазілінійна еліптична крайова задача в дворівневому густому з'єднанні типу 3 : 2 : 2, яке є об'єднанням циліндру Ω_0 та великої кількості ε-періодично розташованих тонких дисків змінної товщини. На поверхнях тонких дисків з обох рівнів задані різні крайові умови третього роду зі збуреними параметрами. Будуються головні члени асимптотики та доводиться відповідна оцінка в просторі Соболєва.

Садовой Д.Ю. *Асимптотическая апроксимация решения квазилинейной эллиптической краевой задачи в двухуровневом густом соединении типа 3:2:2* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 297–315.

Рассматривается квазилинейная эллиптическая краевая задача в двухуровневом густом соединении Ω_ε типа 3 : 2 : 2, которое состоит из цилиндра Ω_0 и большого количества ε-периодически присоединённых тонких дисков переменной толщины. На поверхностях тонких дисков из обоих уровней задаются разные краевые условия третьего рода с возмущёнными коэффициентами. Строятся главные члены асимптотического разложения и показывается соответствующая оценка в пространстве Соболева.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.21

Сливка-Тилищак Г.І.

Рівняння коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами з простору Орліча

Сливка-Тилищак Г.І. *Рівняння коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами з простору Орліча* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 316–327.

Знайдено умови існування з імовірністю двічі неперервно диференційовного розв'язку рівняння коливання однорідної струни з строго орлічевими початковими умовами у термінах кореляційних функцій. Знайдено оцінку для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Вступ

При розв'язувані задач математичної фізики часто потрібно враховувати вплив випадкових факторів, що можуть мати різну природу: Випадкові крайові та початкові умови, випадкові коефіцієнти, випадкова права частина та інші. У зв'язку з цим виникає необхідність в аналізі, що виражає ймовірнісну специфіку розглядуваної задачі. В залежності від типу задачі, специфіки випадкових факторів застосовують різні методи дослідження.

Вивченню задач математичної фізики гіперболічного типу з випадковими початковими умовами із простору $Sub_\varphi(\Omega)$ присвячені такі роботи: Булдигін В.В., Козаченко Ю.В. [1], Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.О. [6, 7], Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. [8, 4], з випадковими початковими умовами із простору Орліча — Барраса де Ла Крус Е., Козаченко Ю.В. [11]. Задачі математичної фізики з випадковою строго φ-субгауссовою правою частиною досліджувалися в роботах Довгая Б.В. [3, 4]. Рівняння параболічного типу з випадковими умовами з простору Орліча розглядалися в роботах Козаченка Ю.В. і Вереш К.Й. [12]. Посилання на інші роботи, які проводилися в цьому напрямку можна знайти в монографії [4].

У даній роботі розглядається крайова задача математичної фізики гіперболічного типу про коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами з простору

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.

Ключові слова і фрази: рівняння коливання однорідної струни, випадкові процеси з простору Орліча, кореляційні функції.

Орліча. Знайдено умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку у термінах кореляційних функцій. Для такої задачі отримано оцінку для розподілу супремуму розв'язку.

1 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 1.1 ([11]). *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається C-функцією, якщо $U(0)=0$ і $U(x)$ зростає при $x>0$.*

Означення 1.2 ([11]). *Будемо говорити, що C-функція и задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0>0$, $k>0$, $A>0$, що для всіх $x>z_0$, $y>z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y)\le AU(kxy).$$

Означення 1.3 ([11]). *Нехай (T,ρ) – метричний простір і $\varepsilon>0$. Позначимо через $N_\rho(t,\varepsilon)$ найменшу можливу кількість точок ε-сітки множини T відносно псевдометрики ρ. Функцію $(N_\rho(t,\varepsilon),\varepsilon>0)$ будемо називати масивністю множини T відносно псевдометрики ρ.*

Нехай $\{\Omega,\mathrm{Im},P\}$ стандартний ймовірнісний простір.

Означення 1.4 ([11]). *Простором Орліча $L_u(\Omega)$ випадкових величин, породженим C-функцією $u(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega)=\xi$, $\omega\in\Omega$, що для кожної $\xi\in L_u(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right)\le\infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U}=inf\left\{r>0: Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right)\le 1\right\}.$$

Означення 1.5 ([11]). *Процес $X=\{X(t),t\in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t\in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 1.6 ([11]). *Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча ($E\xi=0$), називається строго орлічевою, якщо існує стала C_Δ, що для скінченної кількості $\xi_i\in\Delta$, $i\in I$ і для будь-якого $\lambda_i\in\mathbf{R}^1$ виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_u}\le C_\Delta\left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Означення 1.7 ([11]). *Випадковий процес $X=\{X(t),t\in T\}$, $(X\in L_U(\Omega))$ називається строго орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $X=\{X(t),t\in T\}$ - є строго орлічевою. Випадкові процеси $X=\{X(t),t\in T\}$ та $Y=\{Y(t),t\in T\}$ називаються сумісно строго орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),Y(t),t\in T\}$ є строго орлічевою.*

Теорема 1 ([2]). *Нехай $\xi(X)$, $E\xi(X)=0$, $X\in T$, $T=\{(x,y)\,|a_i\le x_i\le b_i, i=1,\dots,n\}$ — неперервне з ймовірністю одиниця випадкове поле. Нехай $B(X,Y)=E\xi(X)\xi(Y)$ — кореляційна функція поля $\xi(X)$. Нехай існують частинні похідні $B_{ii}(X,Y)=\frac{\partial^2 B(X,Y)}{\partial X_i\partial Y_i}$, $i=1,2$. $B_{ii}(X,Y)$ — кореляційні функції похідних в середньому квадратичному $\frac{\partial\xi(X)}{\partial x_i}$. Якщо існує неперервна з ймовірністю одиниця модифікація поля $\frac{\partial\xi(X)}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, тоді, ця модифікація є звичайною частинною похідною випадкового поля $\xi(X)$.*

2 Рівняння коливання струни з випадковими початковими умовами з простору Орліча в термінах кореляційних функцій

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного гіперболічного рівняння [9]. Ставиться питання про існування функції $u=(u(x,y),\ x\in[0,\pi],\ \ t\in[0,t])$, яка задовольняє наступним умовам:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; \tag{1}$$

$$x\in[0,\pi],\ t\in[0,T],\ T>0;$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0)=\xi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\eta(x),\ x\in[0,\pi]. \tag{3}$$

Функції $p=(p(x),\ x\in[0,\pi])$, $q=(q(x),\ x\in[0,\pi])$, $\rho=(\rho(x),\ x\in[0,\pi])$ задовольняють умовам:

1. $p(x)>0,\rho(x)>0,\ q(x)\ge 0,\ x\in[0,\pi]$;
2. $p(x)$, і $\rho(x)$ – двічі неперервно диференційовні функції на $x\in[0,\pi]$;
3. $q(x)$ – неперервно диференційовна на $x\in[0,\pi]$.

Припустимо, що $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ і $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ є випадкові процеси із простору Орліча і такі, що майже напевно

$$\xi(0)=\xi(\pi)=\eta(0)=\eta(\pi)=0. \tag{4}$$

Позначимо кореляційні функції цих процесів через

$$B_\xi(x,y)=E\xi(x)\xi(y),\quad B_\eta(x,y)=E\eta(x)\eta(y),\ x,\ y\in[0,\pi].$$

Із рівностей (4) випливає

$$B_\xi(0,y)=B_\xi(x,0)=B_\xi(\pi,y)=B_\xi(x,\pi)=0,$$

$$B_\eta(0,y)=B_\eta(x,0)=B_\eta(\pi,y)=B_\eta(x,\pi)=0.$$

Рівняння (1) описує коливання неоднорідної струни із закріпленими кінцями (2) і випадковими початковими умовами (3). При цьому випадковий процес $\xi(\bullet)$ описує початкове положення струни, а випадковий процес $\eta(\bullet)$ – початкову швидкість.

При використанні методу Фур'є [9] розв'язок задачі шукається у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left[A_k cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}sin\sqrt{\lambda_k}t\right], \tag{5}$$

$$x\in[0,\pi],\ t\in[0,T],\ T>0;$$

де

$$A_k=\int_0^\pi \xi(x)X_k(x)\rho(x)dx,\quad B_k=\int_0^\pi \eta(x)X_k(x)\rho(x)dx,\ k\ge 1,$$

$\lambda_k,\ k\ge 1$ — власні значення, $X_k=(X_k)(x),\ x\in[0,\pi]),\ k\ge 1$ – відповідні їм власні функції наступної задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right)-q(x)x(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\quad x\in[0,\pi], \tag{6}$$

$$X(0)=X(\pi)=0. \tag{7}$$

Оскільки функції $p(x)$, $\rho(x)$, $q(x)$ задовольняють умовам 1 - 3, то всі власні значення $\lambda_k,\ k\ge 1$ додатні [9], занумеруємо їх так, що $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots\lambda_n<\dots$. Власні функції $X_k,\ k\ge 1$ – двічі неперервно диференційовні на $[0,\pi]$.

Нехай $D=[0,\pi]\times[0,T]$, а $C(D)$ – простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним Банаховим простором.

Лема 2.1. *[9] Нехай $\lambda_k,\ k\ge 1$ і $X_k,\ k\ge 1$ – власні значення і відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля (4.6)–(4.7), де функції p, q, ρ задовольняють умовам 1. 3. Тоді при $k\to\infty$ $\sqrt{\lambda_k}=k+O\left(\frac{1}{k}\right)$ і для всіх $x\in[0,\pi]$*

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin k\left(\int_0^x\left(\frac{\rho(u)}{p(u)}\right)^{\frac{1}{2}}du\right)+\frac{\beta_k}{k},\ \ \sup_{k\ge 1}\ \underset{x\in[0,\pi]}{sup}|\beta_k(x)|<\infty.$$

Наступні теореми є частковими випадками теореми 8 та теореми 9 роботи [10].

Теорема 2. *Нехай $\xi(x)$, $\eta(x)$ — випадкові процеси із простору Орліча $L_U(\Omega)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області D існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3), що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо щоб виконувались умови:*

1) існували неперервні з ймовірністю одиниця похідні $\frac{d^2\xi(x)}{dx^2}$, $\frac{d\eta(x)}{dx}$, $0\le x\le\pi$;

2) для всіх $(x,t)\in D$ збігаються ряди:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}X_k(x)X_l(x)\Big[EA_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t+\tfrac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t$$
$$+\tfrac{2EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\ \Big],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}X_k(x)X_l(x)\left[EA_kA_l\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t+\frac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t\right.$$
$$\left.-2\,\frac{EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\right],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_k\lambda_lX_k(x)X_l(x)\left[EA_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t+\frac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\right.$$
$$\left.+2\,\frac{EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\right];$$

3) *для* $n\geq 1,\ k=0,1,2$

$$\sup_{\substack{|x-y|\leq h\\|t-s|\leq h}}\left(E\left|S_n^{(k)}(x,t)-S_n^{(k)}(y,s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sigma_k(h),$$

де $\sigma_k(h)$ *– неперервні монотонно зростаючі функції, такі що* $\sigma_k(h)\to 0$ *при* $h\to 0$ *і виконується умова*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty,\tag{8}$$

де $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *– обернені функції до* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Приклад 1. *Нехай* $\xi(x)$ *і* $\eta(x)$ *сумісно строго орлічеві процеси з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x)=|x|^p,\ p>2$ *тобто з простору* $L_p(\Omega)$. *Нехай в умові 8* $\sigma_k(h)=C_k|h|^\delta,\ 0<\delta<1$. *Тоді, для того щоб виконувалась умова 8 потрібно, щоб для досить малого* $\varepsilon>0$ *збігався інтеграл:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\left(\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\left(\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{1}{p}}du.$$

При достатньо малих $\varepsilon>0$ *дана умова буде мати вигляд:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\cdot\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\right)^{\frac{1}{p}}du\leq D\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{u^{\frac{2}{p\delta}}}\right)du.$$

де $D=\left(\frac{\pi TC_k^{\frac{2}{\delta}}}{4}\right)^{\frac{1}{p}}$. *Останній інтеграл збігається коли* $\delta>\frac{2}{p}$.

Теорема 3. *Нехай випадкові процеси* $\xi(x)$ *і* $\eta(x)$, $x\in[0,\pi]$ *є сумісно строго орлічеві процеси з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x)=|x|^p$, *при* $p>2$. *Нехай*

$$B_\xi(x,y)=E\xi(x)\xi(y),\quad B_\eta(x,y)=E\eta(x)\eta(y).$$

Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області D *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3), зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *існують неперервні частинні похідні* $x,y\in[0,\pi]$

$$B_\xi^{**}(x,y)=\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2\partial y^2},\quad B_\eta^{*}(x,y)=\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x\partial y},$$

для достатньо малого h *і* $\delta>\frac{2}{p}$ *виконуються нерівності*

$$\sup_{|x-y|\leq h}\left(B_\xi^{**}(x,x)+B_\xi^{**}(y,y)-2B_\xi^{**}(x,y)\right)\leq C_{**}\,|h|^\delta,$$

$$\sup_{|x-y|\leq h}\left(B_\eta^{*}(x,x)+B_\eta^{*}(y,y)-2B_\eta^{*}(x,y)\right)\leq C_{1*}\,|h|^\delta;$$

2) *збігається наступний ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k^2l^2\left[|EA_kA_l|+\frac{|EB_kB_l|}{kl}+2\frac{|EA_kB_l|}{l}\right]<\infty;$$

3) *для довільних* $\delta>\frac{2}{p}$ *виконуються наступна умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\left(EA_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{(EB_k^2)^{\frac{1}{2}}}{k}\right)k^\delta<\infty.$$

Накладемо деякі умови на кореляційні функції $B_\xi(x,y)$ і $B_\eta(x,y)$. Розглянемо задачу (1)–(3) при $p(x)=\rho(x)=1$. Продовжимо функції $B_\xi(x,y)$, $B_\eta(x,y)$ на всю площину так, щоб вони були періодичними функціями з періодом 2π за x і y і щоб виконувались рівності

$$B_\xi(-x,y)=-B_\xi(x,y)=B_\xi(x,-y),\quad B_\eta(-x,y)=-B_\eta(x,y)=B_\eta(x,-y).$$

Нехай

$$\Delta_{\tau_1\tau_2}f(x,y)=f(x+\tau_1,y+\tau_2)-f(x+,y+\tau_2)-f(x+\tau_1,y)+f(x,y),$$

$$\hat{B}_\xi=\frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3\partial y^3},\quad \hat{B}_\eta=\frac{\partial^4 B_\eta(x,y)}{\partial x^2\partial y^3},$$

Теорема 4. *Нехай випадкові процеси* $\xi(x)$ *і* $\eta(x)$, $x\in[0,\pi]$ *є незалежні строго орлічеві процеси з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x)=|x|^p$, *при* $p>1$. *Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області* D *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3), при наведених вище обмеженнях, зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *у продовжених на всю площину функцій* $B_\xi(x,y)$, $B_\eta(x,y)$ *існують обмежені похідні*

$$\frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},\ i+j=6,\quad \frac{\partial^4 B_\eta(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},\ i+j=4;$$

2) при достатньо малих τ_1 і τ_2, $\tau_1>0$, $\tau_2>0$ та деякому $\gamma>0$ виконуються умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau_1\tau_2}\hat{B}_\xi(x,y)\right|dxdy\le c_1|\tau_1\tau_2|^\gamma,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau_1\tau_2}\hat{B}_\eta(x,y)\right|dxdy\le |c_2\tau_1\tau_2|^\gamma,$$

де $c_1,\ c_2>0$;

3) при достатньо малому $\tau>0$ і деякому $\delta>\frac{2}{p}$ виконуються умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau\tau}\hat{B}_\xi(x,y)\right|dxdy\le c_3\tau^\delta,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau\tau}\hat{B}_\eta(x,y)\right|dxdy\le c_4\tau^\delta$$

де $c_3,c_4>0$.

Доведення. Умова 1) даної теореми забезпечує виконання умови 1) теореми 3. Покажемо, що із виконання умови 2) даної теореми випливає виконання умови 2) тієї ж теореми. Для цього достатньо показати, що

$$|EA_kA_l|\le\frac{c}{|kl|^{3+\gamma}}, \tag{9}$$

$$|EB_kB_l|\le\frac{c}{|kl|^{2+\gamma}}, \tag{10}$$

де c — деяка стала.

Оскільки, за означенням

$$EA_kA_l=\int_0^\pi\int_0^\pi B_\xi(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy,$$
$$EB_kB_l=\int_0^\pi\int_0^\pi B_\eta(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy,$$

і

$$X_k(x)=\frac{1}{\lambda_k}\left(X_k''-q(x)X_k(x)\right),$$

то інтегруючи частинами і використовуючи, що

$$B_\xi(0,y)=B_\xi(\pi,y)=X_k(0)=X_k(\pi)=0,$$

отримаємо

$$\int_0^\pi B_\xi(x,y)X_k''(x)dx=\int_0^\pi\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}X_k(x)dx.$$

Отже

$$EA_kA_l=\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\left[\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}-q(x)B_\xi(x,y)\right)X_l''(y)X_k(x)\right.$$
$$\left.-\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}-q(x)B_\xi(x,y)\right)q(y)X_l(x)X_k(y)dxdy\right].$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}=E\xi'(x)\xi(y),\ \xi(0)=\xi(\pi)=0,$$

тобто

$$\frac{\partial^2B_\xi(x,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2B_\xi(x,\pi)}{\partial x^2}=0,$$

тоді

$$\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}-q(x)B_\xi(x,y)\right)X_l''(y)dy$$
$$=\int_0^\pi\left(\frac{\partial^4B_\xi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}-q(x)\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial y^2}\right)X_l(y)dy.$$

Отже

$$EA_kA_l=\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\left[\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\partial^4B_\xi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}X_k(x)(x)X_l(y)dxdy\right.$$
$$\left.+\int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy\right],$$

де

$$F(x,y)=B_\xi(x,y)q(x)q(y)-\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial x^2}q(y)-\frac{\partial^2B_\xi(x,y)}{\partial y^2}q(x).$$

За припущенням, функція $B_\xi(x,y)$ періодична з періодом 2π за x і y, то $F(x,y)$ – періодична з періодом 2π за x і y ітака, що виконується

$$F(-x,y)=-F(x,y)=F(x,-y).$$

Врахувавши властивості функції $F(x,y)$ і асимптотичні представлення $X_k(x)$ і λ_k із леми 2.1, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^\pi F(x,y)\sin lydy=-\frac{1}{2l}\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial y^2}\sin lydy,$$
$$\int_0^\pi F(x,y)\sin kxdx=-\frac{1}{2k}\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x^2}\sin kydx,$$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)\sin kx\sin lydxdy$$
$$=\frac{1}{4k^2l^2}\int_\pi^{-\pi}\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^4F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\sin kx\sin lydxdy.$$

Отже

$$\left|\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)X_k(x)X_l(x)dxdy\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\frac{1}{k^2l^2}\left[\int_\pi^\pi\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^4F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\sin kx\sin lydxdy\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x^2}\sin kx\beta_l(y)dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial y^2}\sin lx\beta_k(x)dxdy$$
$$\left.\left.+\int_0^\pi\int_0^\pi F(x,y)\beta_l(y)\beta_kxdxdy\right]\right|\le\frac{c}{k^4l^4}.$$

Аналогічно, використавши непарність функції $\frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ за x і за y, отримаємо

$$\left|\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} X_k(x) X_l(y) dxdy\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{kl}\left|\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3} \cos kx \cos ly dxdy\right| + \frac{d_1}{k^2 l^2}$$

Отже
$$|EA_k A_l| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{k^3 l^3}\left|\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3} \cos kx \cos ly dxdy\right| + \frac{d_2}{k^4 l^4}. \tag{11}$$

Розглянемо
$$\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy.$$

Оскільки, функція $\hat{B}_\xi(x,y)$ періодична з періодом 2π за x, і за y, то

$$\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy$$
$$= \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y+\frac{\pi}{l}) \cos kx \cos ly dxdy.$$

Крім того

$$\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy$$
$$= -\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y) \cos kx \cos ly dxdy.$$

Тоді, враховуючи умову 2 даної теореми, отримаємо

$$\left|\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy\right|$$
$$= \left|\frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \left[\hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y+\frac{\pi}{l}) - \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \hat{B}_\xi(x, y+\frac{\pi}{l}) + \hat{B}_\xi(x,y)\right] \cos kx \cos ly dxdy\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \left|\Delta_{\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{l}} \hat{B}_\xi(x,y)\right| dxdy \leq \frac{c}{kl}. \tag{12}$$

З (11) і (12) отримаємо, що виконується (10).

Оскільки

$$EA_k^2 = E\left(\int_0^\pi \xi(x) X_k(x) dx\right)^2 = \int_0^\pi \int_0^\pi B_\xi(x,y) X_k(x) X_k(y) dxdy,$$

то легко довести, що із виконання умови 3) даної теореми випливає виконання умови 3) теореми 3. □

3 Оцінки для розподілу розв'язку задачі про коливання однорідної струни

Теорема 5. *[5] Нехай (T,ρ) метричний компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T,ρ), $X=\{X(t),\ t\in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується умова g. Нехай існує така функція $\sigma=\sigma(h)$, $0\leq h\leq \sup_{t,s\in T}\rho(t,s)$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна і така що $\sup_{\rho(t,s)\leq h}\|X(t)-X(s)\|_U \leq \sigma(h)$. Якщо для деякого ε виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{13}$$

де

$$\chi_U(n) = \begin{cases} n, & n < U(z_0); \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases}$$

$C_U = k(1+U(z_0))\max(1,A)$, $z_0,\ k,\ A$ — константи з означення 1.2, $\sigma^{(-1)}(h)$ — функція обернена до $\sigma(h)$. Тоді з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup_{t\in T}|X(t)|$ належить простору $L_U(\Omega)$ та

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\omega_0\theta} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du = B(t_0,\ \theta),$$

де t_0 — довільна точка з T, $\omega_0=\sigma(\sup_{t\in T}\rho(t_0,\ t))$, $0<\theta<1$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 6. *Нехай в умовах теореми 5 $T=\{0\leq x\leq\pi,\ 0\leq t\leq T\}$, $\rho((x,\ t),\ (x_1,\ t_1)) = \max(|x-x_1|,|t-t_1|)$. Тоді умова 13 виконується, коли для деякого $\varepsilon>0$ виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right) du < \infty,$$

а

$$B(t_0,\ \theta) \leq \widetilde{B}(t_0,\ \theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\omega_0\theta} \chi U\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right) du,$$

та для довільного $\varepsilon>0$

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 5, оскільки в цьому випадку

$$N(u) \le \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)(u)}} + 1\right).$$

□

Нехай

$$u_n(x,\ t) = \sum_{k=n}^{\infty} X_k(x)\left[A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right].$$

Нехай як і в теоремі 2 виконується умова

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h\\ |t-s|\le h}} \left(E\left|S_n^{(0)}(x,t) - S_n^{(0)}(y,s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sigma_0(h),$$

де $\sigma_0(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції, такі що $\sigma_0(h) \to 0$ при $h \to 0$ і виконується умова

$$\int_{0+}^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty, \tag{14}$$

де $\sigma_0^{(-1)}(\varepsilon)$ — обернені функції до $\sigma_0(\varepsilon)$. Тоді має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in T}|u_n(x,\ t)| > \varepsilon\right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1},$$

де

$$B(t_0,\ \theta) \le \widetilde{B}(t_0,\ \theta) = \|u(x_0,t_0)\|_U +$$
$$+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\omega_0\theta} \chi_U\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_0^{(-1)(u)}} + 1\right)\right) du.$$

Література

1. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. *К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями* // Случайные процесы в задачах математической физики. — 1979. — С. 4–35.
2. Гладкая О.Н. *Условия дифференцируимости по направлению выборочных функций случайных полей* // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1977. — Вып. 17. — С. 33–40.
3. Довгай Б.В. *Обгрунтування методу Фур'єдля неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною* // Укр. мат. журнал. — 2004. — Т.56, №5. — С. 616–524.
4. Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І. Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. — 175 с.
5. Козаченко Ю.В., Вереш К.Й. *Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2009. — Вип. 80. — С. 56–69.

6. Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А. *Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из* $sub_\varphi(\Omega)$ *I* // Укр. мат. журнал. — 1998 . — Т.50, №4. — С. 504–515.
7. Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А. *Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из* $sub_\varphi(\Omega) II$ // Укр. мат. журнал. — 1998. — Т.50, №5. — С. 897–906.
8. Козаченко Ю. В., Сливка Г. І. *Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами* // Теорія ймов. та матем. статист. — 2003. — Вип. 69. — С. 48–63.
9. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. - М.: Высшая школа, 1964. — 559 с.
10. Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й. *Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча* // Наук. вісник. Ужгородського ун-ту. Серія математика і інформатика. — 2008. — Вип. 16. — С. 174–183.
11. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V. *Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions,* Random Oper. And Stoch. Eq., **3**, 3 (1995), 201–220.
12. Kozachenko Yu.V., Veresh K.J. *Boundary-value problems for a nonhomogeneous parabolic equation with Orlicz right side,* Random Oper. and Stoch. Equ., **18** (2010), 97–119.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

Київ, Україна

e-mail: *aslyvka@tn.uz.ua*

Надійшло 01.03.2012

Slyvka-Tylyshchak A. *The equations of homogeneous string vibration with random Orlicz initial conditions,* Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 316–327.

The conditions of existence with probability one of twice continuously differentiated solution formulating in terms of correlation functions of the boundary-value problems of homogeneous string vibration with random strongly Orlicz initial conditions are found. The estimation for distribution of supremum of this problem has been got too.

Сливка-Тилищак А.И. *Уравнение колебания однородной струны из случайными начальными условиями с пространства Орлича* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 316–327.

Найдены условия существования с вероятностью еденица дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения колебания однородной струны с строго орличевыми начальными условиями в терминах корелляционных функций. Найдено оценку для распределения супремума решения такой задачи.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.53

Сокульська Н.Б.

МЕРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ У ПІВСМУЗІ

Сокульська Н.Б. *Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 328–339.

Введено характеристику Неванлінни мероморфних у півсмузі функцій таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, та досліджено її основні властивості. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфної в замиканні півсмуги функції f в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля.

Вступ

В 60-70 роках минулого століття американські математики Л.А. Рубел та Б.А. Тейлор [7] (див. також [2], [5]) розробили метод рядів Фур'є для цілих та мероморфних функцій. На відміну від класичних підходів за функцію зростання вони запропонували брати довільну додатну, неперервну, неспадну і необмежену функцію $\lambda(r)$ і розглядати класи Λ мероморфних функцій скінченного λ-типу, тобто таких, що $T(r, f) \leq A\lambda(Br)$ для довільного $r > 0$ і деяких додатних сталих A і B, де $T(r, f)$ — характеристика Неванлінни функції f.

Цей метод дозволив розв'язати низку важливих задач, зокрема, на основі детального вивчення коефіцієнтів Фур'є

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|d\theta, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

повністю описати множину нулів цілих функцій з класів Λ.

В даній роботі вводиться і досліджується аналог характеристики Неванлінни для мероморфних в замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. За допомогою методу, запропонованого Дж. Літтлвудом [6], встановлюються співвідношення для коефіцієнтів Фур'є мероморфних в S функцій, вводиться характеристика Неванлінни таких функцій, доводиться критерій скінченності їх λ-типу.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: голоморфна функція, мероморфна функція, функція скінченного λ-типу, характеристика Неванлінни, теорема Йенсена-Літтлвуда.

1 Формула Йенсена-Літтлвуда та характеристика Неванлінни мероморфної в півсмузі функції

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂S, $f \not\equiv 0$ і, крім того, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$.

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S, $s_j = \sigma_j + it_j$, через $\{p_j\}$ — послідовність її полюсів в S. Через S^* позначимо смугу S з розрізами $\{\tau\sigma_j + it_j\}$, $\{\tau \mathrm{Re} p_j + i \mathrm{Im} p_j\}$, $1 \leq \tau < \infty$. Нехай $s_0 \in S^*$ і вибране деяке значення $\log f(s_0)$. Покладемо

$$\log f(s) - \log f(s_0) = \int_{s_0}^{s} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \tag{1}$$

де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$.

Нехай $n(\eta, f)$ лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \leq \eta, 0 \leq t < 2\pi\}$, і

$$N(\sigma, f) = \int_0^{\sigma} n(\eta, f) d\eta.$$

Позначимо

$$c_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\sigma + it)| dt. \tag{2}$$

Аналог теореми Йенсена - Літтлвуда ([6]) формулюється наступним чином.

Лема 1.1. *Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги S, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. Тоді*

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = c_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) c_0(0, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{3}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂S. Застосувавши принцип аргумента, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_\eta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n(\eta, \frac{1}{f}) - n(\eta, f).$$

Межа ∂R_η складається з чотирьох відрізків, тому

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\eta} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} d\sigma + i\int_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} dt - \int_0^{\eta} \frac{f'(\sigma + 2\pi i)}{f(\sigma + 2\pi i)} d\sigma - i\int_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} dt\right] = n(\eta, \frac{1}{f}) - n(\eta, f). \tag{4}$$

Оскільки f має період $2\pi i$, то f' також має період $2\pi i$, тоді

$$\int_0^\eta \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma = \int_0^\eta \frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma,$$

і співвідношення (4) запишеться наступним чином

$$\frac{1}{2\pi i}\left[i\int_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dt - i\int_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dt\right] = n(\eta,\frac{1}{f}) - n(\eta,f). \tag{5}$$

Проінтегруємо рівність (5) по η від 0 до σ

$$\int_0^\sigma n(\eta,\frac{1}{f})d\eta - \int_0^\sigma n(\eta,f)d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma\int_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dtd\eta - \frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma\int_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2. \tag{6}$$

Враховуючи означення логарифма (1) функції f, другий інтеграл співвідношення (6) запишемо у вигляді

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma\int_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \frac{\sigma}{2\pi i}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{7}$$

Застосовуючи теорему Фубіні до $\mathcal{J}_1$, отримаємо

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt\int_0^\sigma\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log f(\sigma+it) - \log f(it)]dt, \tag{8}$$

З врахуванням (7) і (8), рівність (6) можна записати наступним чином

$$N(\sigma,\frac{1}{f}) - N(\sigma,f) = l_0(\sigma,f) - l_0(0,f) + i\frac{\sigma}{2\pi}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{9}$$

де

$$l_0(\sigma,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\sigma+it)dt.$$

Взявши дійсні частини обох боків співвідношення (9), отримаємо

$$N(\sigma,\frac{1}{f}) - N(\sigma,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\sigma+it)|dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(it)|dt + \sigma C_f,$$

де $C_f = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}f(0) - \mathrm{Arg}f(2\pi i)]$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Im}\log f$, тобто

$$N(\sigma,\frac{1}{f}) - N(\sigma,f) = c_0(\sigma,f) - c_0(0,f) + \sigma C_f, \quad \sigma > 0. \tag{10}$$

З припущення відсутності нулів та полюсів на ∂S та з ізольованості наявних випливає існування $\sigma_0 > 0$ такого, що $f \neq 0, \infty$ при $\sigma \leq \sigma_0$. Тому з (10) маємо

$$0 = \frac{1}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,f) - \frac{1}{\sigma_0}c_0(0,f) + C_f, \quad \sigma > 0. \tag{11}$$

Поділивши рівність (10) на σ і віднявши від неї (11), одержимо

$$\frac{1}{\sigma}[N(\sigma,\frac{1}{f}) - N(\sigma,f)] = \frac{1}{\sigma}c_0(\sigma,f) - \frac{1}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,f) + \left(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma}\right)c_0(0,f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0,$$

звідки й випливає (3).

При незначній модифікації доведення для випадку, коли нулі чи полюси функції f лежать на ∂S отримаємо рівність (3). □

Позначимо

$$m_0(\sigma,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma+it)|dt, \tag{12}$$

де $x^+ = \max\{x,0\}$.

Означення 1.1. *Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, $f \not\equiv 0$ і $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$. Характеристикою Неванлінни функції f називається*

$$T(\sigma,f) = m_0(\sigma,f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0,f) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)m_0(0,f) + N(\sigma,f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{13}$$

Властивості $T(\sigma,f)$ опишемо наступною теоремою.

Теорема 1. *Нехай f — мероморфна в $\overline{S}$ функція, $f \not\equiv 0$ і $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$. Тоді її характеристика Неванлінни $T(\sigma,f)$ володіє наступними властивостями:*

(i) $T(\sigma,f)$ — опукла відносно σ, при $\sigma \geq \sigma_0$;

(ii) $T(\sigma_0,f)$ =0;

(iii) $T(\sigma,f)$ — неспадна, при $\sigma \geq \sigma_0$;

(iv) $T(\sigma,f) = T(\sigma,\frac{1}{f})$, при $\sigma \geq \sigma_0$.

Доведення. Нехай $\log z = \log|z| + i\arg_0 z$, $0 \leq \arg_0 z < 2\pi$, $z \neq 0$. Тоді функція $F(z) = f(\log z)$ мероморфна при $|z| \geq 1$ і $f(\log|z|) = f(\log|z| + 2\pi i)$.

Зобразимо функцію F у вигляді частки двох функцій $\frac{H}{G}$, де H, G — голоморфні при $|z| \geq 1$ без спільних нулів, і $h(s) = H(e^s)$, $g(s) = G(e^s)$. Тоді, застосовуючи (3) до g, маємо

$$N(\sigma,f) = N(\sigma,\frac{1}{g}) = c_0(\sigma,g) - \frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,g) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)c_0(0,g), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Враховуючи, що $(a-b)^+ + b = max(a,b)$, характеристику (13) функції $f=\frac{h}{g}$ запишемо у вигляді:

$$T(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max(\log|h(\sigma+it)|,\log|g(\sigma+it)|)dt$$
$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max(\log|h(\sigma_0+it)|,\log|g(\sigma_0+it)|)dt$$
$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max(\log|h(it)|,\log|g(it)|)dt,\quad \sigma\ge\sigma_0>0. \tag{14}$$

Позначимо $I(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|h(\sigma+it)|,\log|g(\sigma+it)|)dt$.

Тоді $I(\sigma,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|H(e^{\sigma+it})|,\log|G(e^{\sigma+it})|)dt$.

Функція $u(z)=\max(\log|H(z)|,\log|G(z)|)$ субгармонійна при $|z|\ge1$, тому $I(\sigma,F)$ опукла [3, ст. 27], [1, ст. 49], при $\sigma\ge0$.

Згідно з (14)

$$T(\sigma,f)=I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f),\quad \sigma\ge\sigma_0>0. \tag{15}$$

Оскільки $T(\sigma,f)$ є сумою опуклої відносно $\sigma\ge\sigma_0$ функції $I(\sigma,f)$ та лінійної функції $A\sigma+B$, то властивість (i) виконується. За властивістю опуклості $I(\sigma,f)$, при $0\le\sigma$ маємо $I(\sigma_0,f)\le\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma}I(0,f)+\frac{\sigma_0}{\sigma}I(\sigma,f)$. Звідси, $0\le I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f)$. Таким чином, згідно з (15) ми отримали, що $T(\sigma,f)\ge0$. Якщо $\sigma=\sigma_0$, то з (15) випливає, що $T(\sigma_0,f)=0$.

Оскільки $T(\sigma,f)$ опукла, відносно σ, при $\sigma\ge\sigma_0$, то за теоремою 1.6 із [4, ст. 28] (див також [1, ст. 11]) в кожній точці вона має похідну справа і

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}\frac{T(\sigma,f)-T(\sigma_0,f)}{\sigma-\sigma_0}=\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}\frac{T(\sigma,f)}{\sigma-\sigma_0}=T'_+(\sigma_0,f)\ge0.$$

Похідна справа опуклої функції за цією ж теоремою не спадає. Тому $0\le T'_+(\sigma_0,f)\le T'_+(\sigma,f)$, $\sigma\ge\sigma_0$. Отож, характеристика $T(\sigma,f)$ неспадна.

Покажемо, що виконується властивість *(iv)*. Застосуємо рівність (3) до функції $\frac{1}{f}$:

$$N(\sigma,f)-N(\sigma,\frac{1}{f})=c_0(\sigma,\frac{1}{f})-\frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,\frac{1}{f})+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)c_0(0,\frac{1}{f}),\quad \sigma\ge\sigma_0>0.$$

Враховуючи (2) і властивість $\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x}$, для $x>0$, отримаємо

$$N(\sigma,f)-N(\sigma,\frac{1}{f})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma+it)|dt$$
$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma_0+it)|}dt+\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma_0+it)|dt$$
$$+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(it)|}dt-(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(it)|dt,\quad \sigma\ge\sigma_0>0.$$

Звідси,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma+it)|dt-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma_0+it)|dt+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(it)|dt$$
$$+N(\sigma,f)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma_0+it)|}dt+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(it)|}dt$$
$$+N(\sigma,\frac{1}{f}),\quad \sigma\ge\sigma_0>0. \tag{16}$$

З рівності (16) та означення 1.1 отримуємо *(iv)*. Теорему доведено. □

2 Коефіцієнти Фур'є мероморфної в півсмузі функції

Нехай f — відмінна від тотожного нуля функція, що голоморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma=\{\eta+it: 0<\eta\le\sigma, 0\le t<2\pi\}$ і $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$. Припустимо, що f не має нулів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ позначимо множину нулів f в R_σ, $(s_j=\sigma_j+it_j)$.

Нехай $R^*_\sigma=R_\sigma\setminus\bigcup\limits_j\{\tau\sigma_j+it_j\}$, $1\le\tau<\infty$ і $\log f(s)$ визначений як в (1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R^*_\sigma\bigcup\partial R_\sigma$.

Покладемо:

$$l_k(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikt}\log f(\sigma+it)dt,\quad k\in\mathbb{Z}; \tag{17}$$

$$c_k(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Лема 2.1. *При виконанні зроблених вище припущень правильні наступні співвідношення:*

$$l_k(\sigma, f) = e^{k\sigma} l_k(0, f) + \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}} - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)], \; k \in \mathbb{Z}; \tag{18}$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma} \alpha_k(f) - e^{-k\sigma} \overline{\alpha_{-k}}(f)}{2k} + \frac{1}{2k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left[\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k\right], \; k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

де $c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k}(\sigma, f)$, $\alpha(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{f'(it)}{f(it)} dt$.

Доведення. Нехай $\eta < \sigma$. Застосуємо принцип аргумента до функції $\frac{f'(s)}{f(s)} e^{-ks}$ в прямокутнику R_η. Отримаємо:

$$\int\limits_{\partial R_\eta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} e^{-k\zeta} d\zeta = 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{20}$$

Оскільки ∂R_η складається з 4-х відрізків, то (20) набуде вигляду:

$$\int\limits_0^{\eta} \frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} e^{-k\gamma} d\gamma + i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} dt - \int\limits_0^{\eta} \frac{f'(\gamma + 2\pi i)}{f(\gamma + 2\pi i)} e^{-k(\gamma + 2\pi i)} d\gamma$$

$$- i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt = 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{21}$$

Зважаючи на $2\pi i$-періодичність функцій $f(s)$ та e^{-ks}, співвідношення (21) запишемо наступним чином

$$i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} dt - i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt = 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{22}$$

Домножимо (22) на $\frac{e^{k\eta}}{i}$, проінтегруємо отриману рівність по η від 0 до σ.

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} dt d\eta - \int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt d\eta = 2\pi \int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta, \tag{23}$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. До першого інтегралу рівності (23) застосуємо теорему Фубіні.

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} dt d\eta = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} d\eta dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} [\log f(\sigma + it) - \log f(it)] dt. \tag{24}$$

Другий інтеграл співвідношення (23) дає

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt d\eta = \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt = \frac{e^{k\sigma} - 1}{ik} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} d(\log(it))$$

$$= -i \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)] + \left(e^{k\sigma} - 1\right) \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt. \tag{25}$$

Використавши означення логарифма функції і (17), з (23) - (25) отримаємо:

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta = l_k(\sigma, f) - e^{k\sigma} l_k(0, f) + \frac{i}{2\pi} \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{26}$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Інтегруючи в інтегралі Стільтєсса, отримуємо:

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta = \frac{1}{k} e^{k\sigma} \sum_{s_j \in R_\sigma} e^{-ks_j} - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} e^{k\sigma_j} e^{-ks_j}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{27}$$

Із врахуванням (27), співвідношення (26) набуває вигляду

$$l_k(\sigma, f) = e^{k\sigma} l_k(0, f) + \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}} - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{28}$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Враховуючи рівність (3), отримаємо (18). Оскільки $c_k(\sigma, f) = \frac{l_k(\sigma, f) + \overline{l_{-k}(\sigma, f)}}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, то, використовуючи (28), маємо

$$2c_k(\sigma, f) = l_k(\sigma, f) + \overline{l_{-k}(\sigma, f)} = e^{k\sigma} l_k(0, f) + \overline{e^{-k\sigma} l_{-k}(0, f)}$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}} - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^{\sigma}}{\overline{e^{s_j}}}\right)^{-k} + \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}}$$

$$- \frac{i}{2\pi} \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)] - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-k\sigma} - 1}{k} \left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Але, використавши (17), можемо записати

$$l_k(0, f) + \overline{l_{-k}(0, f)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt + \overline{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ikt} \log f(it) dt}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Проінтегруємо частинами в обох інтегралах:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt = \frac{i}{2\pi k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)] + \frac{1}{2\pi k} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{f'(it)}{f(it)} dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{2\pi}\overline{\int_0^{2\pi} e^{ikt}\log f(it)dt} = \frac{i}{2\pi k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right] - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи вище отримані обчислення, рівність (29) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
2c_k(\sigma,f) &= \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}}{k}\left[\log f(2\pi i) - \log f(0)\right] + \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right]\\
&+ \frac{e^{k\sigma}}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - \frac{e^{-k\sigma}}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt + \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{\overline{e^{s_j}}}\right)^{-k}\\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i) - \log f(0)\right] - \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right]\\
&= \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] - \frac{e^{k\sigma}}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right]\\
&+ \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] + \frac{e^{-k\sigma}}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right]\\
&+ \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k + e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt\\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] + \frac{e^{k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right]\\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] - \frac{e^{-k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right], \quad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Використовуючи те, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, з останньої рівності отримуємо:

$$2c_k(\sigma,f) = e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt + \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$

$k\in\mathbb{N}$. Звідси випливають рівності (19).

Рівність $c_{-k}(\sigma,f) = \overline{c_k(\sigma,f)}$, випливає безпосередньо з введення $c_k(\sigma,f)$. Лема 2.1 доведена. □

Нехай f — відмінна від тотожного нуля функція, що мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta \le \sigma, 0 \le t < 2\pi\}$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ позначимо множину нулів f в R_σ, через $\{p_j\}$ — множину її полюсів в R_σ ($s_j = \sigma_j + it_j, p_j = \mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j$).

Нехай $R^*_\sigma = R_\sigma \setminus (\bigcup_j\{\tau\sigma_j + it_j\} \cup \{\tau\mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j\})$, $1 \le \tau < \infty$ і $\log f(s)$ визначений як в (1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R^*_\sigma \bigcup \partial R_\sigma$.

Аналогічними міркуваннями прийдемо до наступного твердження.

Лема 2.2. *За вище зроблених припущень правильні наступні співвідношення:*

$$\begin{aligned}
c_k(\sigma,f) &= \frac{e^{k\sigma}\alpha_k(f) - e^{-k\sigma}\overline{\alpha_{-k}(f)}}{2k}\\
&+\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],\\
c_{-k}(\sigma,f) &= \overline{c}_k(\sigma,f) \quad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{30}$$

де $\alpha(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k\in\mathbb{N}.$

3 Мероморфні в півсмузі функції скінченного λ - типу

Означення 3.1. *Додатна неспадна неперервна і необмежена функція $\lambda(\sigma)$, при $\sigma > \sigma_0$ називається функцією зростання.*

Означення 3.2. *Нехай $\lambda(\sigma)$ — функція зростання, f — мероморфна функція в $\overline{S}$, $f \not\equiv 0$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Функція f називається функцією скінченного λ-типу, якщо $\exists\ A,\ B > 0$ такі, що $T(\sigma,f) \le A\lambda(\sigma + B)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$.*

Клас мероморфних в S функцій скінченного λ-типу позначимо через Λ, а клас голоморфних в S функцій скінченного λ-типу позначимо через Λ_H.

Теорема 2. *Нехай функція f голоморфна в замиканні півсмуги S і така, що $f \not\equiv 0$, $f(\sigma) = f(\sigma + it)$, $\lambda(\sigma)$ — функція зростання така, що $\sigma = O(\lambda(\sigma))$, $\sigma \to \infty$. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

(i) $f \in \Lambda_H$;

(ii) $|c_k(\sigma,f)| \le A\lambda(\sigma + B)$, *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *і деяких* $A, B > 0$, $k\in\mathbb{Z}$;

(iii) $|c_k(\sigma,f)| \le \frac{A\lambda(\sigma+B)}{|k|+1}$, *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *і деяких* $A, B > 0$, $k\in\mathbb{Z}$.

Доведення. Якщо виконується (i), то $T(\sigma,f) \le A\lambda(\sigma + B)$, при деяких $A, B > 0$ і всіх $\sigma > \sigma_0$. Тоді згідно з (2), властивістю $|\log x| = \log^+ x + \log^+\frac{1}{x}$, де $x > 0$, і пунктом (iv) теореми 1 отримаємо

$$|c_k(\sigma,f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\sigma+it)|\right|dt$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma+it)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt$$

$$\le m_0(\sigma,f) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)m_0(0,f) + m_0(\sigma,\frac{1}{f}) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)m_0(0,\frac{1}{f})$$

$$-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(it)||dt \le 2T(\sigma,f)+\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(it)||dt$$
$$\le 2A\lambda(\sigma+B)+C\sigma \le A_1\lambda(\sigma+B), \quad k\in\mathbb{Z},$$

де C стала, $A_1=\max\{2A,C\}$.

Нехай виконується (ii). Тоді з рівності (19) маємо:

$$e^{-k}c_k(\sigma+1,f)-c_k(\sigma,f)=-\frac{\overline{\alpha_{-k}(f)}}{2k}(e^{-k(\sigma+2)}-e^{-k\sigma})+\frac{1}{2k}\sum_{\sigma<\sigma_j\le\sigma+1}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k$$
$$-\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\le\sigma+1}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma+1}}\right)^k+\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\le\sigma}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(\sigma,f)|\le\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k}+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{n(\sigma,\frac{1}{f})}{2k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Але, оскільки

$$N(\sigma+1,\frac{1}{f})\ge\int\limits_0^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\ge\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\ge n(\sigma,\frac{1}{f}),$$

то

$$|c_k(\sigma,f)|\le\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{N(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k}+\frac{N(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{N(\sigma,\frac{1}{f})}{2k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи (3), отримаємо таку нерівність

$$N(\sigma,\frac{1}{f})<|c_0(\sigma,f)|+C_1\sigma, \quad \sigma\ge\sigma_0>0, \tag{31}$$

де C_1 — стала.

Використовуючи властивість $c_{-k}=\overline{c_k}$, умову (ii) та (31), отримуємо

$$|c_k(\sigma,f)|\le\frac{A_1\lambda(\sigma+B_1)}{|k|+1}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

для всіх $\sigma\ge\sigma_0>0$ і деяких A_1,B_1, таких, що $A_1=\max\{4A,3C_1\}$, $B_1=B+1$.

Припустимо, що виконується (iii), тоді

$$T(\sigma,f)=m_0(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0,f)+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)m_0(0,f)\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(\sigma+it)||dt$$

$$+C\sigma\le\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(\sigma+it)||^2dt\right]^{\frac12}+C\sigma=\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(\sigma,f)|^2\right]^{\frac12}+C\sigma$$
$$\le A\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(|k|+1)^2}\right]^{\frac12}\lambda(\sigma+B)+C\sigma\le A_2\lambda(\sigma+B),$$

при всіх $\sigma\ge\sigma_0>0$ і для деяких сталих C,A_2, а це означає, що $f\in\Lambda_H$. Таким чином, з (iii) випливає (i). □

Література

1. Бридун А.М., Бродяк О.Я., Васильків Я.В., Христіянин А.Я. Опуклі, гармонійні та субгармонійні функції. Задачі і теореми. — Львів: Видавництво ЛНУ ім. І. Франка, 2011. — 106 с.
2. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. — Л.: Вища школа, 1988. — 196 с.
3. Хейман У.К. Мероморфные функции. — М.: Мир, 1966. — 288 с.
4. Хейман У., Кеннеді П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980. — 304 с.
5. Kondratyuk A., Laine I. *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., **10** (2006), 9–111.
6. Littlewood J. E. *On the zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Camb. Philos. Soc., **22** (1924), 295–318.
7. Rubel L.A., Taylor B.A. *Fourier series method for meromorphic and entire functions*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53–96.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *natalia_sokulska@yahoo.com*

Надійшло 24.03.2012

Sokul's'ka N.B. *Meromorphic functions of finite λ-type in a half-strip*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 328–339.

The Nevanlinna characteristic of meromorphic functions in a half-strip, such that $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, is introduced, and its main properties are investigated. A criterion of λ-type finiteness of holomophic in the half-strip functions in terms of Fourier coefficient of $\log|f|$ is obtained.

Сокульска Н.Б. *Мероморфные функции конечного λ-типа в полуполосе* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 328–339.

Введена характеристика Неванлинны мероморфных в полуполосе функций таких, что $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, доказаны ее основные свойства. Получен критерий конечности λ-типа голоморфной в полуполосе функции f в терминах коэфициентов Фурье логарифма ее модуля.

Карпатські математичні
публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Тарас О.Г.

АЛГЕБРИ БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Тарас О.Г. *Алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 340–346.

В роботі розглянуто алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на просторах ℓ_1 та ℓ_2 та досліджено спектри цих алгебр.

Вступ

Нехай X — банаховий простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $H_b(X)$ — алгебра аналітичних функцій обмеженого типу на X, тобто $H_b(X)$ складається з аналітичних функцій, обмежених на обмежених підмножинах в X. $M_b(X)$ – множина ненульових лінійних мультиплікативних функціоналів (характерів) на $H_b(X)$. Множину $M_b(X)$ також називають спектром алгебри $H_b(X)$ (див. [1, 3]).

Відомо, що $H_b(X)$ є проективною границею банахових алгебр $H^\infty_{uc}(B_r)$ — рівномірно неперервних аналітичних функцій на кулі $B_r \subset X, r \in \mathbb{N}$. Зокрема $H_b(X) = \cap H^\infty_{uc}(B_r)$. Тому $M_b(X)$ є індуктивною границею множин $M_b(B_r)$ характерів $H^\infty_{uc}(B_r)$. Зокрема, (див. [2]),

$$M_b(X) = \cup M_b(B_r).$$

Позначимо A_n — алгебру, породжену поліномами степеня $\leq n$, зокрема A_1 — алгебра, породжена лінійними функціоналами і сталими функціями. Нехай I_n — ідеал, породжений n-однорідними поліномами з A_n. Легко бачити, що $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ (див. [6]).

Теорема 1. *[5] Існує характер $\varphi \in M_b(X)$, який розділяє ідеали $I_k \neq I_{k+1}$, тобто $\varphi(I_k) = 0, \varphi(I_{k+1}) \neq 0$.*

Ця теорема є одним з результатів, що дозволяє описати елементи спектру алгебри $H_b(X)$. Проте, у явному вигляді важко зобразити конкретні елементи $M_b(X)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: спектр, множина максимальних ідеалів, блочно-діагональні аналітичні функції, поліном, простір ℓ_1.

1 Підмножина $\mathcal{N}_m$ банахового векторного простору

Нехай X — банаховий простір з топологічним базисом Шаудера $\{e_k\}$. Розглянемо підмножини X:

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(X) = \bigcup_k \{\lambda e_k, \lambda \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(X) = \bigcup_{k\neq j} \operatorname{span}(e_k, e_j) = \bigcup_{k,j} (\mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}e_j),$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_m(X) = \bigcup_{k_1\neq\ldots\neq k_m} \operatorname{span}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}) = \bigcup_{k_1\neq\ldots\neq k_m} (\mathbb{C}e_{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_{k_m}),$$
$$\ldots.$$

Зауваження 1.1. *Якщо простір X є скінченновимірним, то $\mathcal{N}_m = X$, для $m = dimX$.*

Нехай $H_b(\mathcal{N}_m)$ — алгебра звужень функцій з $H_b(X)$ на $\mathcal{N}_m$, $M_b(\mathcal{N}_m)$ — відповідна множина характерів. Аналогічно, як у випадку $H_b(X)$ алгебру $H_b(\mathcal{N}_m)$ (див. [2]) можна розглядати як перетин рівномірних алгебр $H^\infty_{uc}(\mathcal{N}_m(r))$, де $\mathcal{N}_m(r) = B(r) \cup \mathbb{N}_m, r \in \mathbb{N}$:

$$H_b(\mathcal{N}_m) = \cap H^\infty_{uc}(\mathcal{N}_m(r)),$$
$$M_b(\mathcal{N}_m) = \cup M_b(\mathcal{N}_m(r)).$$

Легко бачити, що оператор звуження $T_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ є гомоморфізмом алгебр. Відомо, що ядро кожного гомоморфізму є ідеал і тому $H_b(\mathcal{N}_m)$ є фактор-простором по ядру $\operatorname{Ker}T_m$ гомоморфізму T_m:

$$H_b(\mathcal{N}_m) = H_b(X)/\operatorname{Ker}T_m.$$

Твердження 1.1. *Нехай $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, тоді φ можна продовжити до характера $\tilde{\varphi}$ на $H_b(X)$ за формулою: $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T_m$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, T_m — гомоморфізм, то $\varphi \circ T_m$ також є лінійним мультиплікативним функціоналом і $\varphi \circ T_m : H_b(X) \to \mathbb{C}$, тому $\varphi \circ T_m$ — характер з $M_b(X)$. Оскільки $\varphi \circ T_m$ можна вважати продовження φ у $M_b(X)$, то $\tilde{\varphi} := \varphi \circ T_m$. □

Таким чином, вивчення спектру алгебри $H_b(X)$ можна звести до вивчення вужчої множини — спектру алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$ і спробувати узагальнити отримані результати на $H_b(X)$.

Використовуючи біноміальну формулу, запишемо загальний вигляд n-однорідного полінома $P \in P(^nX)$ для довільного $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X$:

$$P(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_m} \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} x_{k_1}^{n_1} \ldots x_{k_m}^{n_m} \overline{P}(e_{k_1}^{n_1}, \ldots, e_{k_m}^{n_m}), \tag{1}$$

де $\overline{P}$ — симетрична n-лінійна форма, яка відповідає поліному P.

На підмножинах $\mathcal{N}_m$ простору X загальний вигляд поліномів дещо простіший:

$$P \in P(^n\mathcal{N}_1) : P(x) = \sum_k \sum_n C_k x_k^n,$$
$$P \in P(^n\mathcal{N}_2) : P(x) = \sum_{k\neq j} \sum_m a_{kj} x_k^{n-m} x_j^m,$$
$$\ldots,$$
$$P \in P(^n\mathcal{N}_m) : P(x) = \sum_{k_1\neq\ldots\neq k_m} \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} a_{n_1}\ldots a_{n_m} x_{k_1}^{n_1}\ldots x_{k_m}^{n_m},$$
$$\ldots.$$

Тобто фактично від полінома $P(x) \in P(^nX)$ при обмеженні на $\mathcal{N}_m$ залишається тільки його m-вимірна "діагональ". Такі поліноми називають блочно-діагональними (див.[4]) або діагональними у випадку $m = 1$.

Твердження 1.2. *Простір поліномів $P(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$ ізоморфний до простору поліномів $P(^mX)$:*

$$P(^m\mathcal{N}_m) \cong P(^mX). \tag{2}$$

Доведення. Нехай $x = \sum_k x_k e_k$. Для доведення ізоморфності достатньо показати, що оператор звуження $T_m : X \to \mathcal{N}_m$ є бієктивним та неперервним. Неперервність випливає автоматично з обмеженості оператора. Всі поліноми $P(x)$ розглядаємо на одиничних базисних векторах $e_1, \ldots, e_k, \ldots$, тобто на одиничній кулі, тому $||P|| = 1$.

Оператор T_m є інєктивним тоді і тільки тоді, коли ядро цього оператора $\mathrm{Ker}T_m$ складається тільки з $\{0\}$. Знайдемо множину поліномів, для яких $T_m(P) = 0$. Запишемо загальний вигляд полінома (1), звуженого на $\mathcal{N}_m$. Для довільного $x \in \mathcal{N}_m$ існує набір базисних векторів $e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}$ такий, що $x = x_{k_1}e_{k_1} + \ldots x_{k_m}e_{k_m}$. Тому

$$P(x) = P(\lambda_{k_1}e_{k_1} + \ldots \lambda_{k_m}e_{k_m}) = \sum_{n_1+\ldots+n_m=m} \lambda_{k_1}^{n_1}\ldots\lambda_{k_m}^{n_m} P(e_{k_1}^{n_1}, \ldots, e_{k_m}^{n_m}).$$

Даний добуток буде дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли для всіх $k_1, \ldots, k_m$ значення $\overline{P}(e_{k_1}^{n_1}, \ldots, e_{k_m}^{n_m})$ в рівності (1) буде дорівнювати нулю. Серед поліномів степеня m — це тільки нульові поліноми. Це означає, що $\mathrm{Ker}T_m = \{0\}$ в просторі $P(^mX)$.

Оскільки T_m є оператором звуження, тому для кожного образа оператора з $P(^m\mathcal{N}_m)$ існує прообраз з $P(^mX)$ і T_m є бієктивним оператором. А, отже, T_m — ізоморфізм. Це і доводить ізоморфність просторів $P(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$ і $P(^mX)$. □

Теорема 2. *Для кожного характера $\psi \in M_b(X)$ існує послідовність $\varphi_m \in M_b(\mathcal{N}_m)$ така, що послідовність продовжень $\widetilde{\varphi}_m \in M_b(X)$ збігається до ψ в слабко поліноміальній топології. Тобто, $\varphi_m(P) \to \psi(P)$ при $m \to \infty$ для кожного полінома $P \in H_b(X)$.*

Доведення. Позначимо ψ_m — звуження функціонала ψ на $P(^{\leq m}\mathcal{N}_m)$ — простір поліномів степеня $\leq m$ на $\mathcal{N}_m$. Оскільки простір $P(^m\mathcal{N}_m)$ ізоморфний простору $P(^mX)$ відносно оператора звуження T_m для кожного натурального m, то функціоналу ψ_m відповідає функціонал $\varphi_m \in P(^{\leq m}\mathcal{N}_m)^*$ такий, що $\widetilde{\varphi}_m = \psi \circ T_m$. Нехай P — поліном степеня n. Тоді, для $m \geq n$, $\psi(P) = \psi_m(P) = \psi_m \circ T(P) = \widetilde{\varphi}_m(P)$. Оскільки T — гомоморфізм, то $\widetilde{\varphi}_m$ — гомоморфізми і, отже φ_m — гомоморфізми. Таким чином, ми знайшли послідовність $(\varphi_m) \subset M(\mathcal{N}_m)$ таку, що $\widetilde{\varphi}_m(P) = \psi(P)$ при $m \geq n = \deg P$. Тому

$$\widetilde{\varphi}_m(P) \to \psi(P) \text{ при } m \to \infty \tag{3}$$

для довільного полінома P. □

Зауваження 1.2. *Питання, чи буде виконуватись (3) для довільної аналітичної функцій $f \in H_b(X)$ є відкритим, оскільки не відомо, чи залишок $||\psi(f) - \widetilde{\varphi}_m(f)||$ буде прямувати до нуля в топології Гельфанта.*

Зауваження 1.3. $P(^2\mathcal{N}_1) \ncong P(^2X)$. *Дійсно, довільний поліном другого степеня вигляду $\sum_{i\neq j} x_i x_j$ на множині $\mathcal{N}_1 \subset X$ буде дорівнювати нулю, тому не можливо встановити бієкцію між цими просторами.*

Цей висновок аналогічно можна узагальнити на випадок $\mathcal{N}_m$:

Зауваження 1.4. $P(^n\mathcal{N}_m) \ncong P(^nX)$, $\mathcal{N}_m \subset X$, *якщо* $n > m$.

2 Опис множини характерів алгебри діагональних поліномів на ℓ_1

Нехай $X = \ell_1$. Розглянемо добуток лінійних функціоналів $f(x) = \sum_k a_k x_k$, $g(x) = \sum_k b_k x_k$, $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_1$ і обмежимо його на $\mathcal{N}_1(\ell_1)$. Оскільки $x \in \mathcal{N}_1(\ell_1)$, то $x = (0, \ldots, x_k, 0, \ldots)$ або $x = x_k e_k$ для деякого $k \geq 1$, тому лінійні функціонали f, g на $\mathcal{N}_1(\ell_1)$ матимуть вигляд:

$$f(x) = a_k x_k, g(x) = b_k x_k \text{ і їх добуток } h(x) = a_k x_k \cdot b_k x_k = c_k x_k^2.$$

Оскільки $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ (як коефіцієнти), то добуток k-тих координат $a_k \cdot b_k = c_k$, $k \geq 1$ визначить послідовність $(c_k)_{k=1}^\infty$, яка також буде належити до ℓ_∞.

Якщо $A_1(X)$ — алгебра, породжена поліномами степеня n, $n \leq 1$ і $A_1(\mathcal{N}_1)$ — відповідне обмеження алгебри $A_1(X)$ на підмножину $\mathcal{N}_1$, то множина функцій $H_b(\ell_1)|_{\mathcal{N}_1}$ наближається всеможливими алгебраїчними комбінаціями лінійних функціоналів з $A_1(\mathcal{N}_1)$:

$$A_1(\mathcal{N}_1) = H_b(\mathcal{N}_1), \qquad \mathcal{N}_1 \subset \ell_1.$$

Теорема 3. *Множиною характерів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація $\beta\mathbb{N}$ множини натуральних чисел. Довільний характер $\varphi \in \beta\mathbb{N}$ має вигляд:*

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \text{ де } P \in P(^1\mathcal{N}_1), \mathcal{U} - \text{ деякий фіксований ультрафільтр на } \mathbb{N}.$$

Доведення. Як було зауважено вище, $H_b(\mathcal{N}_1) = A_1(\mathcal{N}_1)$, тому кожен характер на $H_b(\mathcal{N}_1)$ визначається своїми значеннями на $P(^1\mathcal{N}_1)$. З іншого боку, кожен поліном $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$ має вигляд:

$$P(x) = P(x_k e_k) = a_k x_k, \text{ де } P(e_k) = a_k. \tag{4}$$

Перебираючи всеможливі $x \in \mathcal{N}_1$, кожному поліному $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$, можна поставити у відповідність послідовність елементів $\{a_k\} \subset \ell_\infty$.

Нехай φ – характер на $P(^1\mathcal{N}_1)$, тоді

$$(P \cdot Q)(e_k) = a_k \cdot b_k, \text{ де } P(e_k) = a_k, Q(e_k) = b_k,$$

і, таким чином,

$$\varphi(\{a_k\} \cdot \{b_k\}) = \varphi(\{a_k\})\varphi(\{b_k\}).$$

Це означає, що функціонал φ діє як мультиплікативний функціонал на ℓ_∞, а, отже, φ — характер на ℓ_∞. Множиною характерів на ℓ_∞, а, отже, і на $P(^1\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація множини $\mathbb{N}$, тобто $M(\ell_\infty) = \beta(\mathbb{N})$. Як відомо, $\beta(\mathbb{N})$ можна розглядати як множину всіх ультрафільтрів на $\mathbb{N}$.

Нехай $\varphi \in \beta(\mathbb{N})$, тоді існує ультрафільтр на $\mathbb{N}$, що $\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} a_k$, де $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$, $a_k \in \ell_\infty$ і з (4) маємо:

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \qquad P \in P(^1\mathcal{N}_1).$$

Операція взяття границі є лінійною і мультиплікативною, тому φ — характер на $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Отже, множиною характреів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація $\beta(\mathbb{N})$. □

3 Випадок простору ℓ_2

Нехай $X = \ell_2$. Аналогічно $f(x) = a_k x_k$ і $g(x) = b_k x_k$ — обмеження лінійних функціоналів на $\mathcal{N}_1(\ell_2)$ такі, що ряди $\sum_k |a_k|^2$ і $\sum_k |b_k|^2$ збіжні. Не завжди, використовуючи всеможливі алгебраїчні комбінації, ми зможемо отримати поліноми степенів ≥ 2. Отже, не всі аналітичні функції з $H_b(\mathcal{N}_1)$ ми зможемо наблизити лінійними функціоналами $f(x)$ і $g(x)$ (як у випадку простору ℓ_1) і $A_1(\mathcal{N}_1) \neq H_b(\mathcal{N}_1)$.

Приклад 1. *Розглянемо поліном вигляду $h(x) = \sum_k x_k^2$ на $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$. Достатньо показати, що не існує функціоналів $f, g \in \ell_2^*$ таких, що їх добуток дорівнює x_k^2. Припустимо, що $f(x) = \sum a_k x_k, g(x) = \sum b_k x_k$. Тоді*

$$a_k x_k \cdot b_k x_k = x_k^2, \text{ отже } a_k \cdot b_k = 1.$$

Але ряди $(a_k^2)_{k=1}^\infty$ і $(b_k^2)_{k=1}^\infty$ неможуть бути одночасно для кожного абсолютно збіжними, тому функціоналів $f(x)$ і $g(x)$ не існує.

Розглядаючи алгебри $A_n(\mathcal{N}_1)$ на просторі ℓ_2, можна стверджувати, що

$$A_1(\mathcal{N}_1) \neq A_2(\mathcal{N}_1).$$

Наступне твердження є аналогом теореми 1 для $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Твердження 3.1. *Нехай $I_1(\mathcal{N}_1)$ і $I_2(\mathcal{N}_1)$ — відповідні ідеали алгебр $A_1(\mathcal{N}_1)$ і $A_2(\mathcal{N}_1)$. Існує характер $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ такий, що $\varphi(I_1) = 0, \varphi(I_2) \neq 0$ і*

$$\varphi_{\mathcal{U}}(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \tag{5}$$

де $\mathcal{U}$ — деякий фіксований вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел.

Доведення. Покажемо, що рівність (5) задовольняє умови даного твердження.

Якщо P — лінійний поліном, то

$$P(x) = \sum_k c_k x_k \text{ і } \varphi_{\mathcal{U}}(P) = \lim_{k\to\infty} c_k = 0$$

оскільки ряд $\sum_k |c_k|^2$ є збіжним. Отже,

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k) = 0.$$

Нехай $P(x) = \sum_k x_k^2 \in A_2(\mathcal{N}_1)$. Тоді,

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k) = \lim_{\mathcal{U}} 1 = 1 \neq 0.$$

Функціонал, який визначається рівністю (5) дорівнює нулю на всіх однорідних поліномах першого степеня з $H_b(\mathcal{N}_1)$ і не дорівнює нулю на поліномах другого степеня. Дана рівність дійсно задовольняє умови твердження.

□

Алгебра $A_3(\mathcal{N}_1) \neq A_2(\mathcal{N}_1), \mathcal{N}_1 \subset \ell_2$, оскільки поліноми вигляду

$$P(x) = \sum c_k x_k^3, \{c_k\} \in \ell_\infty, x \in \mathcal{N}_1(\ell_2) \tag{6}$$

не породжуються, в загальному випадку, алгебраїчними комбінаціями поліномів з $A_2(\mathcal{N}_1)$. Проте, між поліномами вигляду (6) та поліномами з $A_2(\mathcal{N}_1)$ існує алгебраїчна залежність:

$$P^2(x) - Q^3(x) = 0,$$

де $Q(x) = \sum \sqrt[3]{c_k^2} x_k^2 \in A_2(\mathcal{N}_1)$. Тому, якщо $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ такий, що $\ker\varphi \supset I_2$, то $\ker\varphi \supset I_3$. Тобто, не існує характера, який розділяє ідеали I_2 та I_3. Для $m > 3$, легко бачити, що $A_m(\mathcal{N}_1) = A_3(\mathcal{N}_1)$. Таким чином, у випадку $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$, $M_b(\mathcal{N}_1) = M(A_3(\mathcal{N}_1))$.

Література

1. Aron R.M., Berner P.D. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France., **106** (1978), 3–24.
2. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51–93.
3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Weak-star continuous analytic functions*, Can. J. Math., **47** (1995), 673–683.
4. Davie A.M., Gamelin T.W. *A theorem on polynomial-star aproximation*, Proc. Amer. Math. Soc., **106** (1989), 351–356.
5. Zagorodnyuk A. *Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559–2569.
6. Zagorodnyuk A. *Spectra of Algebras of Analytic Functions and Polynomials on Banach Spaces*, Contemporary Math., **435** (2007), 381–194.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 09.10.2012

Taras O. *Block-diagonal algebras of analytic functions on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 340–346.

In this work we consider about algebras block diagonal of analytic functions on the space ℓ_1 and ℓ_2 and investigate spectra of these algebras.

Тарас О.Г. *Алгебры блочно-диагональных аналитических функций на банаховых пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 340–346.

В работе рассмотрено алгебры блочно-диагональных функций на пространстве ℓ_1 и ℓ_2 и исследовано спектры этих алгебр.

Для нотаток

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 4, №2
2012

Відповідальний за випуск	д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція	Дубей М.В., Лабачук О.В.
Комп'ютерна правка та макетування	Дубей М.В., Кравців В.В.

Підписано до друку 5.11.2012 р. Формат $60\times84/_{8}$.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 23,5. Наклад 300 примірників. Замовлення 192

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32